

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**DIPLÔME DE DOCTEUR EN MÉCANIQUE
NON LINÉAIRE ET CHRONOMÉTRIE**

par

Nour Eldin CHEICKH OBEID

**COMMANDE OPTIMALE EN BOUCLE FERMÉE
PAR INTERMITTENCE DE SYSTÈMES
MULTIVARIABLES ;
APPLICATION A UN PROCESSUS THERMIQUE**



Soutenue le 18 juin 1980, devant la Commission d'Examen,

MM. F. LHOTE

Président

**A.Y. BARRAUD
A. FAURE
B. LANG
J.C. MIELLOU**

Examineurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546609_0020

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**DIPLÔME DE DOCTEUR EN MÉCANIQUE
NON LINÉAIRE ET CHRONOMÉTRIE**

par

Nour Eldin CHEICKH OBEID

**COMMANDE OPTIMALE EN BOUCLE FERMÉE
PAR INTERMITTENCE DE SYSTÈMES
MULTIVARIABLES ;
APPLICATION A UN PROCESSUS THERMIQUE**



Soutenue le 18 juin 1980, devant la Commission d'Examen,

MM. F. LHOTE

Président

**A.Y. BARRAUD
A. FAURE
B. LANG
J.C. MIELLOU**

Examineurs

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCK-CONTE

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR EN MECANIQUE
NON LINEAIRE ET CHRONOMETRIE

par

Monsieur Elio K. OREID



COMMANDE OPTIMALE EN BOUCLE FERMÉE
PAR INTERMITTENCE DE SYSTÈMES
MULTIVARIABLES ;
APPLICATION A UN PROCESSUS THERMIQUE



Remise le 20 juin 1980, devant la Commission d'Examen.

Président

M. F. LHOE

Examinateurs

A. V. BARRAUD
A. FAURE
E. LAMB
J. C. MELLON

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ BESANÇON

Président : Monsieur le Professeur Pierre LÉVÊQUE

Président honoraire : Monsieur le Professeur Jean THIÉBAUT

FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN

M. le Professeur Jean BULABOIS
Physique Générale-optique

ASSESEURS

M. le Professeur Bernard MILLET
Botanique

M. Robert GUYETANT, Maître-Assistant
Biol. animale Ecologie

DOYENS HONORAIRES

MM. GLANGEAUD, JACQUEMAIN, CHATELET,
THIEBAUT, BERNARD

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. BENNETON, CHATELET, MESNAGE, QUANTIN
THEOBALD N., THIRY, TRILLAT, TRONCHET,
UEBERSFELD

MM. BANTEGNIE Robert	: Mathématiques
BENILAN Philippe	: Mathématiques
BERNARD Jean	: Chimie Physique
BIDAULT Michel	: Taxonomie expérimentale
BROQUET Paul	: Géologie
BRUCKERT Sylvain	: Ecologie végétale
BULABOIS Jean	: Physique Gle optique
CAPODANNO Pierre	: Mécanique théorique
CERUTTI Ernest	: Chimie appliquée
CHALEAT Raymond	: Mécanique appliquée
CHARDON J. Claude	: Spectroscopie
CHAUVE Pierre	: Géologie minéralogie
COUGNARD Jean	: Mathématiques
DEVIN Claude	: Chimie 1er cycle
DUBOUCHET Jacques	: Physiologie végétale
GALATRY Louis	: Physique moléculaire
GAUDEMER Yves	: Biochimie
GOMOT Lucien	: Zoologie-Embryologie
GOUARNE René	: Mathématiques
GRAS Georges	: Mathématiques
GREMILLARD Jean	: Mathématiques
KARCHE J. Paul	: Pétrographie Minéralogie
LALLEMENT Gérard	: Mécanique appliquée
LAUDE Bernard	: Chimie organique
LESAINT Pierre	: Mathématiques I
LHOTE François	: Automatique
MERIGOUX Henri	: Cristallographie et Synthèses minérales

MIELLOU J. Claude	: Analyse numérique
MILLET Bernard	: Botanique
MONTAGNER Hubert	: Psychophysiologie
MOREELS Guy	: Astronomie
OLIVIER Marcel	: Electroniq. quantique
PARIZET Jean	: Mathématiques
PERROT Roger	: Chimie générale
PLUVINAGE Philippe	: Physique théorique
POTIER Robert	: Physique des sols
RANGHEARD Yves	: Géologie
REAL Pierre	: Ecologie animale
RIPPLINGER Jean	: Physiologie animale
ROBERT Daniel	: Physique
ROBERT Guy	: Electrochimie
ROBERT Jacques	: Mathématiques I
THEOBALD J. Gérard	: Spectroscopie hertzienne
THIEBAUT Jean	: Pétrogr. minéralogie
TREHEL Michel	: Informatique
VERNEAUX Jean	: Zoologie-Embryologie
VIENOT J. Charles	: Physique Gle optique
WEIL Michel	: Mathématiques

Responsable des services administratifs :

M. Jean-Marie RUNGE

PROFESSEURS E.N.S.M.M.

MM. AVRAMESCO André
BESSON Raymond
FAURE Alain

AVANT - PROPOS

Cette thèse réalisée au sein du Laboratoire d'Automatique de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques de Besançon, n'aurait pu s'achever sans le concours d'un grand nombre de personnes que je tiens à remercier vivement.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur F. LHÔTE, Directeur du Laboratoire d'Automatique de Besançon, de m'avoir accueilli dans son laboratoire, pour l'aide et l'encouragement, les critiques et les suggestions permettant le développement de ce travail, je tiens à lui témoigner ma respectueuse gratitude.

J'adresse à Monsieur BARRAUD, chargé de recherche du CNRS au Laboratoire d'Automatique de Grenoble, mes vifs remerciements pour l'intérêt qu'il porte à ce travail en participant au jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur le Professeur MIELLOU, Directeur du Laboratoire d'Analyse Numérique de la Faculté des Sciences et des Techniques de Besançon, pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Que Monsieur LANG, Maître-assistant au Laboratoire d'Automatique de Besançon trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance, pour l'aide et la permanente disponibilité qu'il a manifestées à mon égard tout au long de ce travail ; aussi pour son aimable participation à ce jury.

Je remercie Monsieur le Professeur FAURE d'avoir bien voulu examiner ce travail.

Je voudrais remercier, pour leur soutien, mes camarades du Laboratoire d'Automatique ; qu'ils trouvent ici l'expression de toute mon amitié.

Je remercie tout particulièrement Monsieur F. HAMELIN et Monsieur P. SPITERI pour leur précieuse collaboration.

Je tiens à rendre hommage à l'amabilité et à la diligence de Mademoiselle COTE et de Monsieur DEMOULIN qui ont apporté le plus grand soin à la réalisation matérielle de ce mémoire.

Je ne saurais oublier le Centre d'Etudes et de Recherches Scientifiques (C . E . R . S .) "SYRIE", qui m'a soutenu sous la forme d'une bourse me permettant d'effectuer ce travail.

TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION</u>	<u>Pages</u>
<u>CHAPITRE I : RAPPELS SUR LA COMMANDE OPTIMALE</u>	1
I.1. Formulation du problème	1
I.2. Principe du minimum de Pontriagin	3
- Conditions nécessaires d'optimalité	3
I.3. Systèmes linéaires optimaux avec critère quadratique ..	5
I.4. Application numérique	6
I.5. Commande en boucle fermée	7
I.6. Cas des systèmes linéaires stationnaires à horizon infini	11
I.7. Conclusions	12
 <u>CHAPITRE II : COMMANDE EN BOUCLE FERMEE PAR INTERMIT- TENCE</u>	 13
II.1. Généralités	13
II.2. Exemples	15
II.3. Commande en boucle périodiquement fermée	21
II.4. Cas des systèmes linéaires stationnaires sans contrain- tes et avec coût quadratique	22
II.4.1. Caractérisation	22
II.4.2. Problème	23
II.4.3. Interprétation	24
II.4.4. Énoncé de l'hypothèse H	25
II.4.5. Conditions suffisantes	27
II.4.6. Exemples	28
II.4.7. Application : commande optimale	30

	<u>Pages</u>
<u>CHAPITRE V : APPLICATION A UN PROCESSUS THERMIQUE ...</u>	67
V.1. Description générale	67
V.2. Organes de commande	68
V.3. Modélisation	69
V.4. Capteur d'état	73
V.5. Problème de la commande du processus	74
V.6. Conclusion	75
 <u>CHAPITRE VI : EXPERIENCES ET RESULTATS</u>	 77
VI.1. Calcul de la loi de commande	77
VI.1.1. <i>Décomposition</i>	79
VI.1.2. <i>Mise en oeuvre des moyens de calcul hybride</i> .	80
VI.1.3. <i>Conditions de convergence du calcul</i>	84
VI.2. Mise en oeuvre de la commande en boucle fermée par intermittence	86
VI.2.1. <i>Choix des matrices de pondération</i>	86
VI.2.2. <i>Estimation d'état initial</i>	87
VI.2.3. <i>Enchaînement de la procédure</i>	88
VI.3. Résultats et commentaires	89
VI.4. Conclusion	98
 <u>CONCLUSION GÉNÉRALE</u>	 99

INTRODUCTION

La minimisation de la consommation d'énergie et de matières premières, et la réduction des nuisances sont de nos jours des problèmes fondamentaux pour l'industrie. A ceci s'ajoutent des exigences précises et souvent contradictoires concernant la qualité des produits fabriqués. La recherche du "meilleur" compromis pose alors le problème de la détermination de la commande optimale du processus.

Pour qu'une telle commande soit efficace, il faudrait posséder une connaissance parfaite du processus physique et des conditions extérieures influant sur son évolution ; l'impossibilité d'avoir a priori une telle information justifie la nécessité d'une structure de commande en boucle fermée ; malheureusement, il est généralement impossible de réaliser une telle structure en dehors du cas linéaire sans contrainte, avec critère de type quadratique.

Nous étudions une structure de commande dite "en boucle fermée par intermittence", consistant à calculer à partir de l'état réel du processus, la commande optimisant l'évolution sur un horizon fini (glissant). Nous recommençons périodiquement le calcul (effectué en ligne en temps accéléré), ce qui permet de renouveler la commande en tenant compte des perturbations.

Cette procédure nécessite bien entendu des moyens de calcul rapides permettant un horizon de calcul de quelques millisecondes. Dans le cas de processus de grande taille, ceci nécessite des techniques d'intégration en parallèle d'équations différentielles, donc le recours à des systèmes de calcul hybride, ou de calcul numérique multi-processeur.

Nous vous proposons dans ce mémoire .

- 1 - d'étudier et d'interpréter le problème de la commande optimale en boucle fermée par intermittence, en examinant notamment le cas particulier des systèmes linéaires stationnaires sans contrainte ;
- 2 - de réaliser une application effective de la commande en boucle fermée par intermittence sur un processus thermique pilote qui est un four muni de douze zones de chauffage et d'un contrôle de température en 12 points.

La méthodologie de réalisation de ce mode de commande a été esquissée au sein de l'équipe de commande optimale du Laboratoire [9], [22], [23], [24] et a pu être mise en oeuvre grâce à des expérimentations antérieures sur ordinateur hybride. Elle repose sur la décomposition du problème en sous-problèmes dont la coordination est assurée par une méthode de relaxation.

Le premier chapitre de notre mémoire est consacré à un bref rappel sur la commande optimale.

Nous traitons dans le deuxième chapitre le problème de la commande en boucle fermée par intermittence et tout particulièrement le cas de systèmes linéaires stationnaires avec critère quadratique, du point de vue stabilité et caractérisation, avec illustration sur un exemple d'un système du second ordre.

Dans le troisième chapitre nous nous intéressons à deux problèmes liés à la réalisation de la commande en boucle fermée par intermittence :

- 1 - l'estimation d'état initial ;
- 2 - la résolution des équations d'optimalité.

Le quatrième chapitre est consacré aux aspects matériels de la réalisation du mode de commande proposé.

Au cinquième chapitre on trouve une description du processus thermique sur lequel portent les expériences et les résultats décrits au sixième et dernier chapitre.

C H A P I T R E 1

RAPPELS SUR LA COMMANDE OPTIMALE

Dans ce chapitre nous rappelons les grandes lignes du principe du minimum de Pontriagin qui nous servira pour la détermination de la loi de la commande optimale de systèmes dynamiques continus.

I.1. Formulation du problème [1] , [2] , [3]

Soit le processus physique dynamique stationnaire, décrit par l'équation différentielle vectorielle d'évolution :

$$(1-1) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = f(y,u) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$$

et l'équation algébrique :

$$(1-2) \quad z(t) = g [y(t), u(t)]$$

où $y(t)$ est l'évolution de l'état, définie sur l'intervalle $T = [t_0, t_f]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$;

$u(t)$ est le vecteur de commande défini sur l'intervalle $T = [t_0, t_f]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $m < n$.

Généralement des contraintes imposées par la réalité physique du processus s'exercent sur l'état et sur la commande en particulier ; il convient donc dans ces cas de définir un domaine admissible. En ce qui nous concerne nous nous placerons dans le cas de systèmes à état non contraint ; le domaine d'admissibilité de la commande sera noté U_{ad} et nous le supposons convexe.

$f(y,u)$ sera défini sur $\mathbb{R}^n \times U_{ad}$ avec par hypothèse (1) :

$$f_i, \frac{\partial f_i}{\partial y}$$

continues par rapport à leurs arguments.

$z(t)$ est le vecteur de sortie défini sur l'intervalle $[t_0, t_f]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, $q < n$, dont l'intérêt apparaîtra ultérieurement.

La détermination de la loi de commande optimale, compte-tenu des contraintes, est fonction de l'objectif que l'on se propose ; on peut admettre généralement que l'objectif de la commande est d'obtenir l'extrémum d'une fonctionnelle J caractérisant le critère d'optimalité :

$$J(\hat{y}, \hat{u}) = \min_u J(y, u)$$

ainsi la fonctionnelle J peut s'écrire :

$$(1-3) \quad J = \int_{t_0}^{t_f} r(y(\tau), u(\tau)) d\tau + m(y_f)$$

où t_0 est l'instant initial, t_f l'instant final et $r(y,u)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times U_{ad}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; c'est la fonction "coût instantané" ; $m(y_f)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui représente un coût terminal attaché à l'état. Nous remarquons que $r(y,u)$ dépend de la signification de l'optimum que l'on cherche.

Nous ferons l'hypothèse (2) :

$$r(y,u) , \frac{\partial r}{\partial y}$$

sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n \times U_{ad}$.

On appelle $T = t_f - t_0$ l'horizon de la commande.

I.2. Principe du minimum de Pontriagin

On définit la fonction hamiltonienne telle que :

$$(1-4) \quad H(y,p,u) = r(y,u) + p^* \cdot f(y,u)$$

où p est le vecteur d'état adjoint, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

En vertu des hypothèses (1) et (2), les fonctions $H(y,p,u)$, $\frac{\partial H}{\partial y}(y,p,u)$ sont continues sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times U_{ad}$. Nous remarquons que $\frac{\partial H}{\partial p} = f(y,u)$ se vérifie pour tout vecteur p ; de plus, pour tout vecteur $p(t_0)$, l'équation différentielle linéaire par rapport à p :

$$(1-5) \quad \dot{p}(t) = - \frac{\partial H}{\partial y}(y,p,u) = - \frac{\partial r}{\partial y} - \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]^* \cdot p$$

a une seule solution $p \mid t, p(t_0)$.

- Définition

Le système différentiel vectoriel :

$$(1-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad ; \quad y(t_0) = y_0 \\ \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial y} \end{array} \right.$$

est appelé, système canonique associé au problème d'optimalité.

- Conditions nécessaires d'optimalité

Soit $u(t)$ une loi de commande admissible et $y(t)$ la trajectoire qui lui est associée, issue à l'instant t_0 du point $y(t_0)$; pour que la commande $\hat{u}(t)$ et la trajectoire $\hat{y}(t)$ soient optimales, il

faut qu'il existe un vecteur $\hat{p}(t)$, fonction continue non nulle, associée aux fonctions $\hat{u}(t)$, $\hat{y}(t)$, tel que :

a) $\hat{y}(t)$ et $\hat{p}(t)$ sont solutions du système (1-6).

b) le vecteur $\hat{p}(t_f)$ est égal au gradient de la fonction $m(y)$ par rapport à y pour $y = \hat{y}(t_f)$; soit :

$$\hat{p}(t_f) = \frac{\partial m}{\partial y} [\hat{y}(t_f)]$$

c) la fonction $H(\hat{y}, \hat{p}, u)$ a un minimum absolu par rapport à $u \in U_{ad}$:

$$\min_{u \in U_{ad}} H(\hat{y}, \hat{p}, u) = H(\hat{y}, \hat{p}, \hat{u})$$

Donc pour établir les conditions d'optimalité de la commande du système (1-1) au sens du critère (1-3), on construit l'Hamiltonien :

$$(1-7) \quad H(y, p, u) = r(y, u) + p^* \cdot f(y, u)$$

duquel on déduit les équations d'optimalité.

$$(1-8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p} = f(y, u) & ; \quad y(t_0) = y_0 \\ -\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]^* \cdot p & ; \quad p(t_f) = \frac{\partial m}{\partial y} [\hat{y}(t_f)] \\ 0 \in \frac{\partial r}{\partial u} + \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]^* \cdot p + \partial \psi_{U_{ad}}[\hat{u}(t)] \end{array} \right.$$

où $\partial \psi_{U_{ad}}[\hat{u}(t)]$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice du domaine convexe U_{ad} en $\hat{u}$ [9]. Dans le cas sans contrainte, $\partial \psi_{U_{ad}}$ est identiquement nul.

On remarque que le système (1-8) comporte une première équation différentielle avec condition initiale $y(t_0) = y_0$, et une deuxième équation différentielle avec condition terminale $p(t_f)$; c'est ce qu'on appelle dans la littérature un "système avec conditions aux deux bouts". On verra au troisième chapitre la technique de résolution d'un tel système d'équations différentielles

I.3. Systèmes linéaires optimaux avec critère quadratique

Considérons le système linéaire stationnaire décrit par l'équation différentielle vectorielle :

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = Ay + Bu \quad ; \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$$

et l'équation algébrique de sortie :

$$(1.10) \quad z(t) = C y(t)$$

où A est une matrice $n \times n$,

B est une matrice $n \times m$,

C est telle que le système défini par (1.9) et (1.10) soit observable.

On souhaite conduire le système de telle sorte que l'écart entre la sortie $z(t)$ et celle désirée z_d soit minimal, tout en fournissant une commande optimale $\hat{u}(t)$ aussi voisine que possible d'une valeur constante u_d . Ces objectifs peuvent être traduits par la minimisation par rapport à $u(t)$ d'un critère quadratique :

$$(1.11) \quad J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [(z-z_d)^* Q (z-z_d) + (u-u_d)^* R (u-u_d)] dt + \frac{1}{2} [z_d - z(t_f)]^* M [z_d - z(t_f)]$$

où Q est une matrice $q \times q$ définie non négative symétrique,

R est une matrice $m \times m$ définie positive symétrique,

M est une matrice $q \times q$ définie non négative symétrique.

L'Hamiltonien (1.4) a alors pour expression :

$$(1.12) \quad H(y, p, u) = \frac{1}{2} [(z-z_d)^* Q(z-z_d) + (u-u_d)^* R(u-u_d)] + p^*(Ay+Bu)$$

Les équations d'optimalité qui s'en déduisent, par analogie à (1.8) s'écrivent alors :

$$(1.13) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = Ay + Bu & ; \quad y(t_0) = y_0 \\ -\dot{p}(t) = C^* QCy + A^* p - C^* Qz_d & ; \quad p(t_f) = M(z_d - z(t_f)) \\ 0 \in R(u-u_d) + B^* p + \partial \psi_{U_{ad}} \end{cases}$$

On montre [5] que sous l'hypothèse de coercivité ⁽¹⁾ de la matrice A, ce problème d'optimisation admet une solution unique que fournit la résolution du système (1.13).

- Remarque

Nous allons nous intéresser par la suite au cas où A n'admet pas la valeur propre 0 et où u_d et z_d sont liés par la relation :
 $z_d = -CA^{-1}Bu_d$; u_d est alors une commande qui sur un temps infini conduit asymptotiquement à la sortie désirée z_d .

I.4. Application numérique

Soit le système linéaire stationnaire :

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + Bu & ; \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R} \\ z = y \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0,01 & 0,005 \\ 0,005 & -0,01 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,008 \\ 0,008 \end{bmatrix}, \quad u_d = 0,375,$$

$$z_d = -A^{-1}Bu_d = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,6 \end{bmatrix}$$

(1) : -A est une matrice coercive si la matrice $-\frac{A+A^*}{2}$ est définie positive.

Nous adoptons le critère (1.11) avec $Q = I$, $R = \lambda I$ et $M = 0$, où I est la matrice unité et λ une constante réelle. Nous illustrons sur la figure (1) les trajectoires optimales (1) et (2) tracées pour $\lambda=1$, $\lambda=2$ respectivement ; la trajectoire (3) correspond à une commande constante égale à u_d .

On remarque sur les trajectoires (1) et (2) l'effet bénéfique de la commande optimale sur l'évolution de l'état relativement à la précision et au temps de réponse, par rapport à une réponse indicielle du système.

Nous montrons sur la figure (2) les lois de commande correspondantes ; on y remarque que l'amplitude de $\hat{u}(t)$ diminue quand on augmente λ , l'évolution de l'état devenant moins performante. Ainsi on interprète λ comme paramètre de pondération entre les deux termes du critère (1.11) ; la dépense (énergétique en général) est d'autant moins grande que λ est important mais l'écart entre la sortie et celle désirée devient plus grand et vice-versa.

I.5. Commande en boucle fermée [6] ; [1]

On se place dans le cas de systèmes linéaires à commande sans contrainte, nous nous limitons au cas stationnaire.

Pour alléger l'exposé qui va suivre, nous allons procéder à un changement de variables tel que :

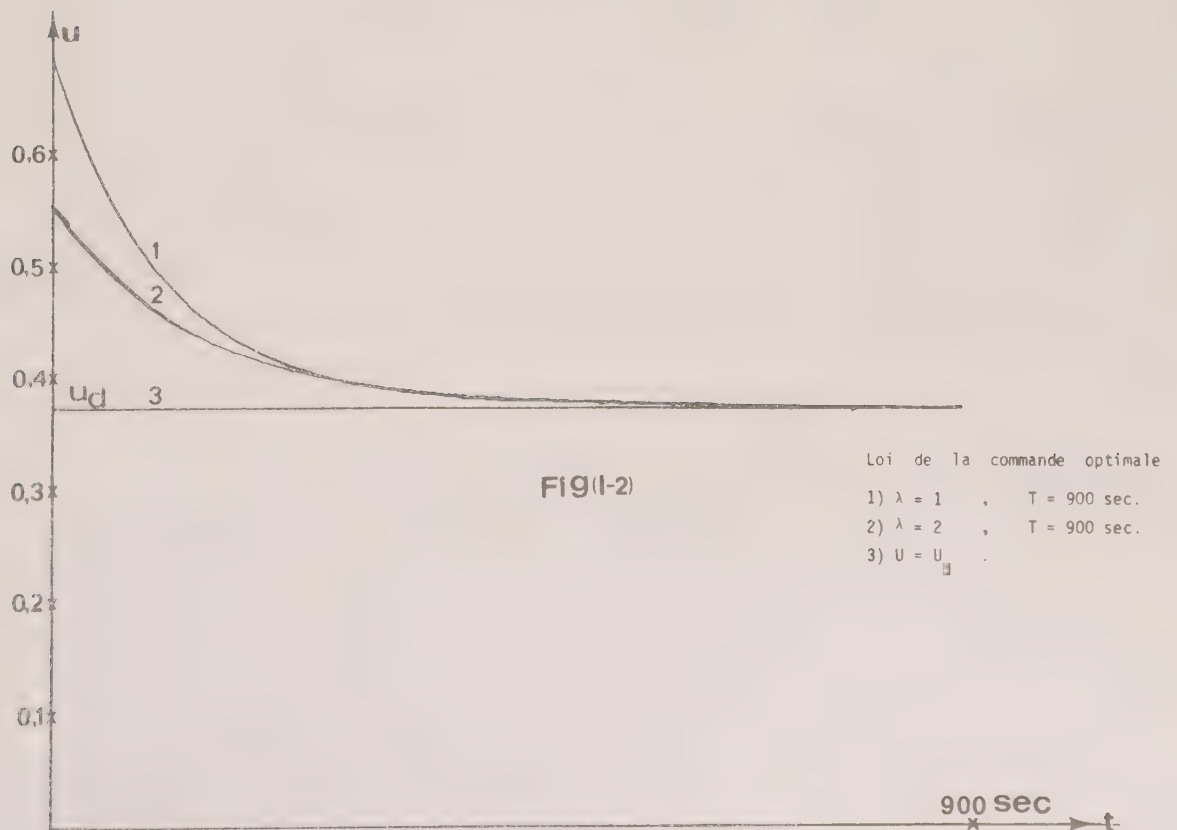
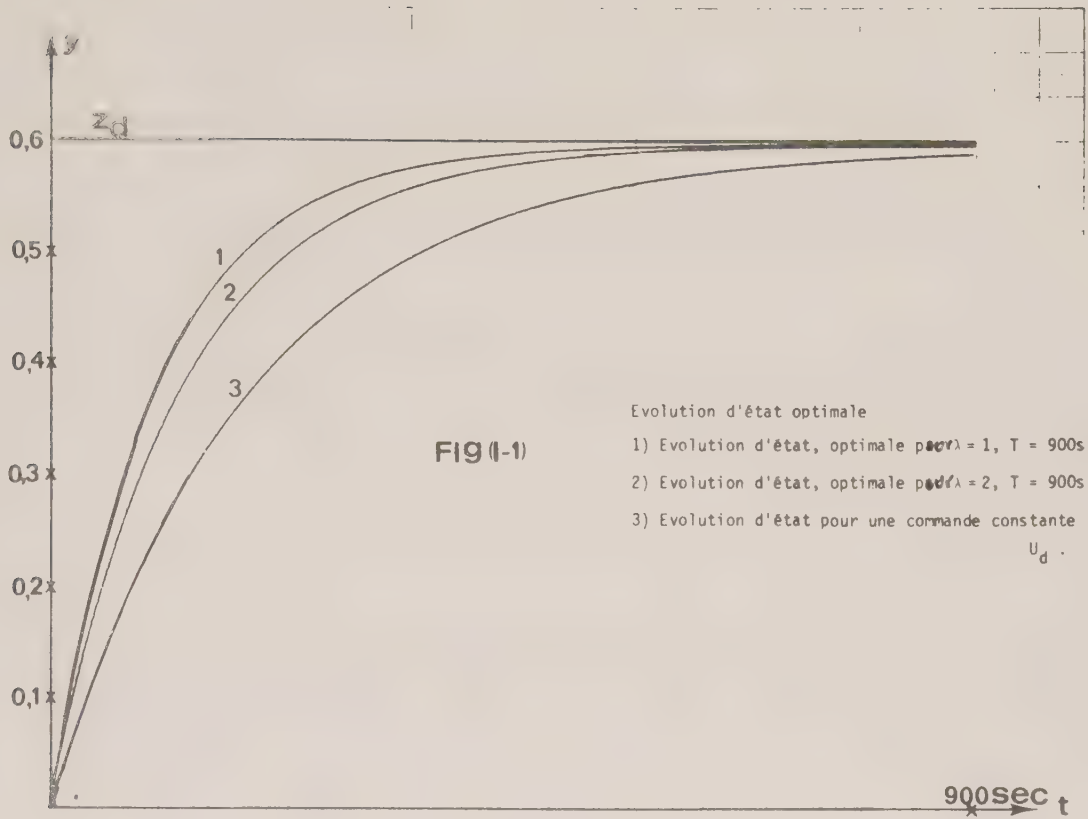
$$Z = z - z_d ; \quad Y = y + A^{-1}Bu_d ; \quad P = p ; \quad U = u - u_d .$$

Nous posons aussi $t_0=0$, donc $t_f=T$.

De plus nous adoptons un critère quadratique sans coût terminal prenant la forme :

$$(1.14) \quad J = \frac{1}{2} \int_0^T [Z^* QZ + U^* RU] dt.$$

les équations d'optimalité deviennent alors :



$$(1.15) \quad \begin{cases} \dot{Y} = AY + BU & ; Y(0) = y(0) + A^{-1}Bu_d \\ -\dot{P} = C^* QCY + A^* P & ; P(T) = 0 \\ 0 = RU + B^* P \end{cases}$$

La linéarité du système (1.15) nous permet de conclure qu'il existe une relation linéaire entre la variable d'état et la variable d'état adjoint telle que :

$$(1.16) \quad P(t) = K(t) Y(t)$$

Les deux premières équations du système (1.15) avec la relation (1.16) nous permettent d'établir l'équation différentielle matricielle non linéaire de Riccati admettant $K(t)$ comme solution :

$$(1.17) \quad \frac{dK}{dt} + K(t) A + A^* K(t) - K(t) B R^{-1} B^* K(t) + C^* Q C = 0$$

$$\text{avec :} \quad K(T) = 0$$

Remplaçons $K(t)$ par sa transposée $K^*(t)$: $K(t)$ et $K^*(t)$ sont solution de la même équation différentielle, donc $K(t)$ est une matrice symétrique. On montre que $K(t)$ est une matrice définie positive ; la forme quadratique $\frac{1}{2} Y^* K(t) Y$ représente l'optimum du critère J pour une évolution partant à l'instant t de l'état Y : $\frac{1}{2} Y^* K(t) Y = \hat{J}(Y, t)$.

Profitant de la troisième équation du système (1.15) et de la relation (1.16), on met en évidence la relation existant entre la commande et l'état :

$$(1.18) \quad \hat{U}(t) = -R^{-1} B^* K(t) \hat{Y}(t)$$

ce qui montre la possibilité d'une structure de commande optimale en boucle fermée ; ceci peut se schématiser par :

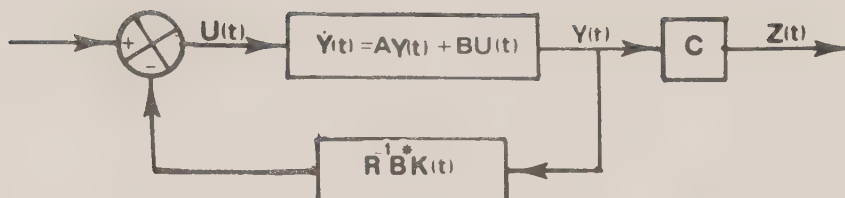


Schéma fonctionnel relatif à la commande optimale
en boucle fermée.

malheureusement, la réalisation d'une telle boucle fermée s'avère parfois assez complexe, car il faut :

- 1°) Résoudre (hors-ligne) l'équation différentielle de Riccati en sens rétrograde [8] , ensuite calculer le gain matriciel $R^{-1}B^*K(t)$ et le mémoriser ;
- 2°) Effectuer le produit $R^{-1}B^*K(t)Y(t)$ en synchronisme avec la variable réelle t .

Dans le cas des systèmes de grande dimension d'autres difficultés que celle de la résolution de l'équation de Riccati peuvent se présenter par la mémorisation d'un nombre de points de $R^{-1}B^*K(t)$ couvrant l'intervalle $[0,T]$; ceci peut dépasser la capacité d'un ordinateur de taille modeste car si on note N le nombre d'échantillons de $K(t)$, il faut mémoriser alors $m \times n \times N$ points.

- Remarque

- 1 - On peut envisager la possibilité de résoudre l'équation de Riccati en sens direct en calculant $K(0)$ à partir de $K(T)$ (ce qui est possible une fois que l'on connaît A , B , R et Q) ensuite diviser l'intervalle $[0, T]$ en sous-intervalles et résoudre l'équation de Riccati dans chaque sous-intervalle ; cette méthode se faisant en ligne diminuera la place à occuper en mémoire. Malheureusement, ceci n'est pas toujours réalisable, car la moindre erreur dans la détermination de $K(0)$ peut destabiliser le calcul de $K(t)$ [11] .
- 2 - La décomposition de l'équation (1.17) en deux équations différentielles linéaires couplées [7] telles que :

$$(1.19) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dot{N}(t) = AN(t) - BR^{-1}B^* G(t) & , \quad N(0) = I \\ \dot{G}(t) = -C^* QCN(t) - A^* G(t) & , \quad G(T) = 0 \end{array} \right.$$

avec : $K(t) = G(t) N^{-1}(t)$

permet d'éliminer la non-linéarité présente dans l'équation (1.17). On aboutit à une augmentation sensible du nombre d'équations différentielles scalaires à résoudre. En effet dans le cas de l'équation de Riccati, profitant de la symétrie de la matrice $K(t)$, on aura à résoudre $\frac{n(n+1)}{2}$ équations différentielles non linéaires contre $2n^2$ équations différentielles linéaires dans le cas du système (1.19).

I.6. Cas des systèmes linéaires stationnaires à horizon infini

On démontre [6] que :

$K \rightarrow \bar{K}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, où $\bar{K}$ est une matrice constante symétrique définie positive solution de l'équation matricielle algébrique :

$$\bar{K}A + A^* \bar{K} - \bar{K}BR^{-1}B^* \bar{K} + C^*QC = 0$$

unique régime permanent de l'équation différentielle de Riccati (1.17). On remarque la stationnarité de la boucle de commande qui rend plus facile la réalisation pratique du feedback ; on remarque aussi la stabilité asymptotique du système (1-9) bouclé, la dérivée de la fonction de Liapounov :

$$V = Y^* \bar{K} Y$$

le long de la trajectoire optimale $\hat{Y}(t)$ étant définie négative.

I.7. Conclusions

- 1°) Une loi de commande optimale est solution du système avec conditions aux deux bouts (1.8).
- 2°) Dans le cas des systèmes linéaires sans contraintes, la commande optimale (au sens d'un critère quadratique) peut se déduire d'une structure de commande en boucle fermée, asymptotiquement stable dans le cas d'un horizon infini.

Pour notre part, nous nous intéressons à des systèmes généralement non linéaires et pouvant présenter des contraintes de commande ; nous cherchons néanmoins à définir une certaine forme de commande en boucle fermée, utilisable dans tous les cas où le système (1.8) admet une solution unique.

C H A P I T R E II

COMMANDE EN BOUCLE FERMEE PAR INTERMITTENCE

II.1. Généralités

Nous nous intéressons en pratique au problème de la régulation de systèmes complexes de fabrication en continu ; la conduite à réaliser se caractérise par trois aspects :

- l'évolution sur une durée indéfinie ;
- l'apparition imprévisible de perturbations ;
- un objectif caractérisé par des consignes constantes.

L'optimisation d'un critère de conduite présente un double intérêt, en visant la minimisation de certains facteurs (erreurs, coûts, ...) et en fournissant une procédure de synthèse d'un régulateur multivariable adapté au processus.

La prise en compte de perturbations non mesurables impose une structure de commande en boucle fermée c'est-à-dire déterminant le signal de commande à un instant donné à partir de la mesure des sorties du processus au même instant. Cette structure permet également d'utiliser sans risque un modèle approché du processus, déterminé dans une phase antérieure d'identification, ce qui ne serait pas concevable dans une conduite en boucle ouverte sur un temps large où le modèle devrait fournir une prévision exacte de l'évolution réelle du processus.

Dans le cas particulier de systèmes linéaires dépourvus de contraintes et avec critère quadratique, on peut résoudre le problème au moyen d'un feedback permanent, caractérisé par un gain matriciel constant, en considérant l'optimisation sur un horizon infini, ou sur un horizon fini fuyant [12] .

Dans le cas général il n'est pas possible, à notre connaissance, de déterminer à priori une structure de feedback optimale convenant à toutes les situations possibles du processus.

Notre approche consiste en un compromis très proche de ce qu'on appelle dans un contexte différent "commande en boucle ouverte adaptée" [13] , [14] :

- a) Nous déterminons à intervalles réguliers, à partir de mesures, l'état réel $y(t_i)$ du système ;
- b) Nous calculons, en résolvant en ligne les équations d'Hamilton-Pontriagin, la loi de commande $\hat{u}(t_i, \tau)$ minimisant sur l'horizon fini T la fonctionnelle :

$$J(t_i) = \int_{\tau=t_i}^{\tau=t_i+T} r(y, u) \, d\tau$$

- c) Nous appliquons au processus la commande :

$$u(t) = \hat{u}(t_i, \tau)$$

calculée en faisant $\tau=t$, $t \in [t_i, t_{i+1}[$

Cette loi de commande est ainsi appliquée jusqu'à l'instant $t = t_{i+1} < t_i + T$ où nous disposons, à l'issue d'un nouveau calcul d'une nouvelle loi $\hat{u}(t_{i+1}, \tau)$.

On peut faire au sujet de cette procédure les remarques suivantes:

- a) La commande $u(t)$ résulte de la concaténation de morceaux de lois de commande en boucle ouverte optimales, chacune étant obtenue à partir d'une détermination de l'état réel : il y a donc un feedback intermittent.

- b) Pour contrer les perturbations, le résultat obtenu n'a d'intérêt que si l'on possède un moyen d'effectuer très rapidement les calculs nécessaires, au prix d'un matériel de coût acceptable ; les travaux antérieurement accomplis au LAB dans le cadre de l'ATP "commande hiérarchisée" ont permis à B. LANG de mettre au point une technique efficace de calcul hybride, donnant dans un grand nombre de cas une réponse positive à cette question [9] .
- c) L'état à l'instant t_i d'application de la commande $\hat{u}(t_i, \tau)$ diffère de l'état existant effectivement à l'instant de démarrage de calcul correspondant ; il est donc nécessaire d'introduire une procédure d'anticipation soit par extrapolation à partir des mesures précédentes soit par prédiction au moyen du modèle - ce qui ne pose aucun problème pour une prédiction à très court terme.
- d) L'anticipation nécessite que la durée du calcul soit connue à l'avance : pour simplifier nous conviendrons de respecter un intervalle constant entre deux calculs successifs, égal à la borne supérieure des temps de calcul susceptibles d'intervenir. Nous aurons ainsi une structure de commande en boucle périodiquement fermée.
- e) Lorsque le temps $(t_{i+1} - t_i)$ séparant deux calculs successifs peut être considéré comme infinitésimal (par rapport au temps de réponse du processus), on se trouve devant une procédure associant à tout état instantané $y(t)$ une commande $u(t) = \hat{u}(t, t)$; la procédure devient alors équivalent à un feedback permanent définissant une loi k stationnaire, mais non linéaire :

$$u = k(y)$$

II.2. Exemples

Sur les figures ci-après les trajectoires sont tracées dans différentes circonstances perturbatrices, mettant en évidence l'intérêt de la commande en boucle fermée par intermittence en comparaison avec la commande optimale en boucle ouverte calculée en temps différé. La

référence étant le cas idéal (sans perturbation) qui sera notée (1) sur les trois figures suivantes. Nous nous sommes servis du système linéaire de second ordre donné dans l'application numérique (I-4). L'horizon de commande commun à ces différents cas est égal à 900 sec.

1) Perturbation d'état initial : Figure (II-1)

On calcule la loi de commande optimale à partir de l'état initial $y(0) = 0$. On applique la commande au processus, l'état initial réel étant $y_r(0) = 0,1$. Les trajectoires de la figure (II-1) sont respectivement :

- trajectoire (1) : trajectoire de référence
- trajectoire (2) : évolution de l'état du processus commandé en boucle ouverte à partir de l'état initial $y_r(0)$. Ceci amène une évolution marquée par un dépassement et une erreur qu'on pourrait qualifier de "permanente" (car T est assez grand) ; cette erreur pourrait être importante lorsque l'horizon est relativement petit.
- trajectoire (3) : évolution de l'état du processus commandé en boucle fermée par intermittence. L'état initial perturbé est $y_r(0)$. La période de fermeture de la boucle est de 5 sec. On constate une amélioration sensible dans la conduite par rapport au cas précédemment, notamment la disparition du dépassement, et une erreur qui s'approche de celle résultant du cas idéal.

2) Perturbation de la matrice d'état : Figure (II-2)

La matrice d'état identifiée $\tilde{A}$ est différente de la matrice d'état réelle A :

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} -0,009 & 0,0045 \\ 0,0045 & -0,009 \end{vmatrix} \quad A = \begin{vmatrix} -0,01 & 0,005 \\ 0,005 & -0,01 \end{vmatrix}$$

La trajectoire (1) représente: l'évolution optimale de l'état du processus commandé en boucle ouverte en adoptant la matrice A pour le calcul de la loi de commande optimale.

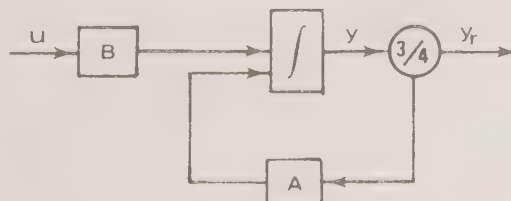
La trajectoire (2) donne : l'évolution de l'état du processus commandé en boucle ouverte où nous nous sommes servis de $\tilde{A}$ pour le calcul de la commande optimale. On remarque une importante erreur "permanente".

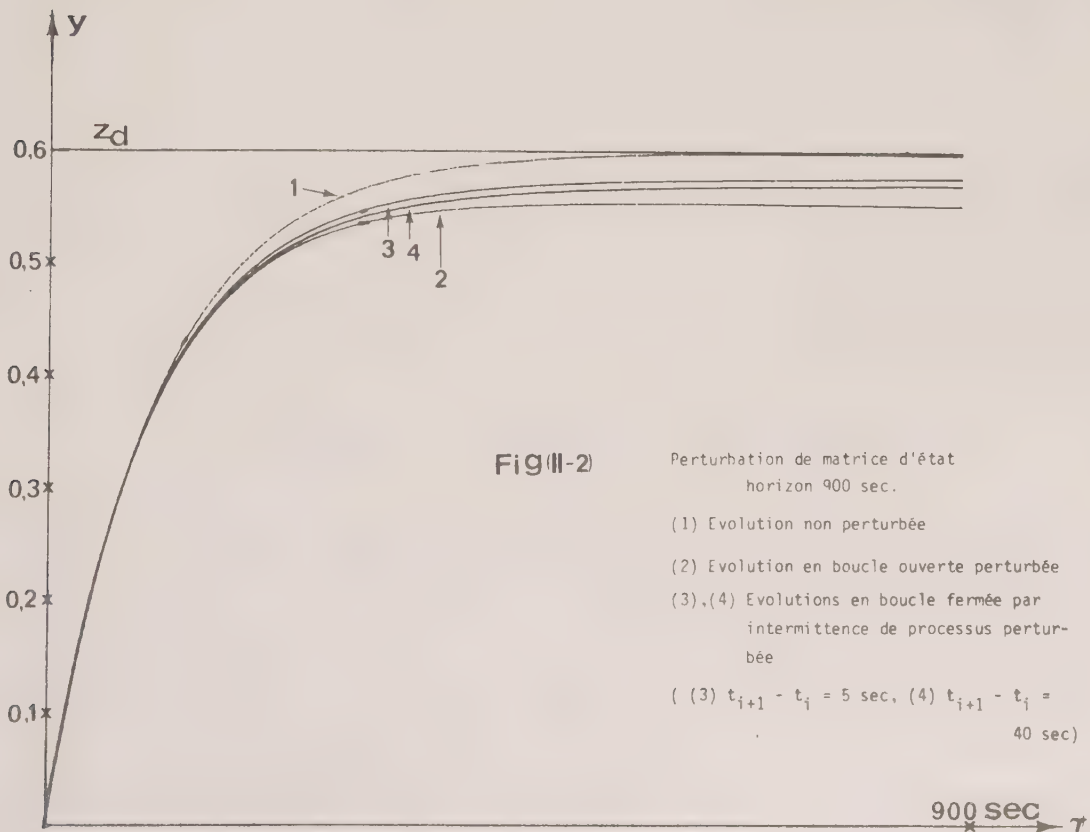
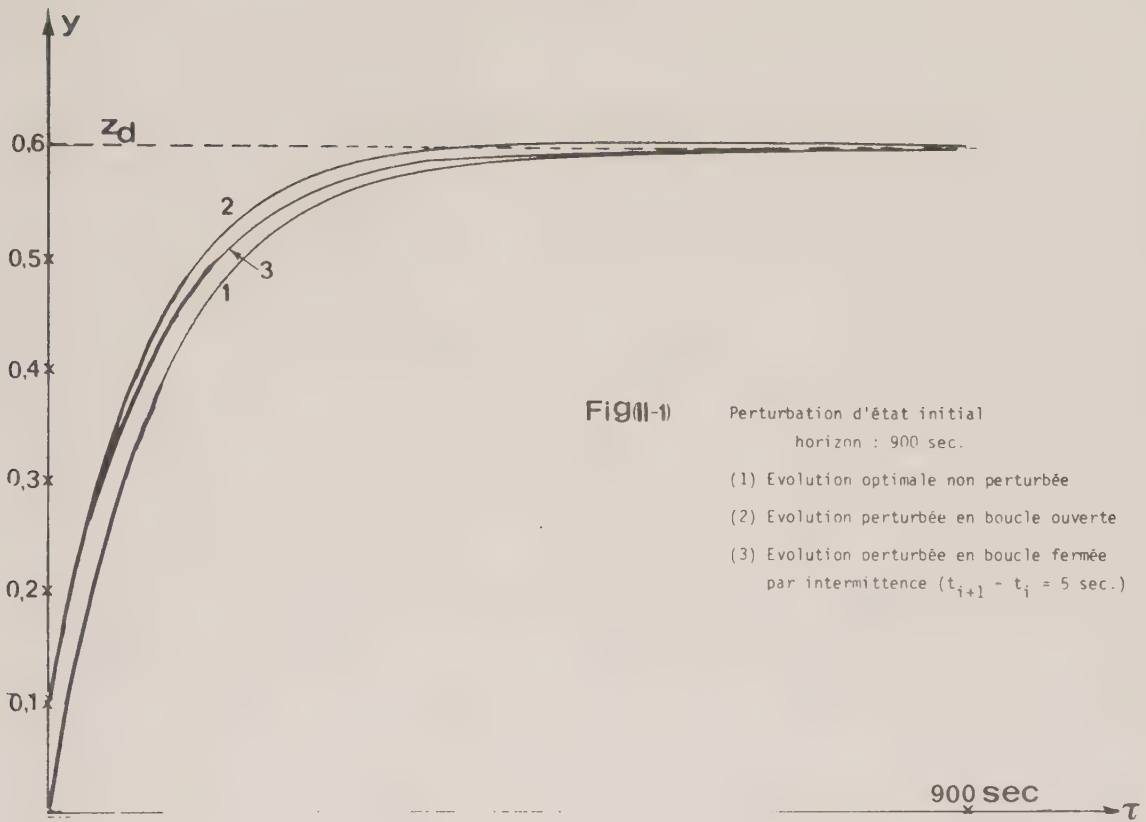
La trajectoire (3) décrit : l'évolution de l'état du processus commandé en boucle fermée par intermittence, la matrice $\tilde{A}$ étant utilisée pour le calcul de la commande avec une période de calcul de la commande de valeur $t_{i+1} - t_i = 5$ sec.

On remarque une diminution sensible de l'erreur qui continuera à décroître si la commande continue au-delà de 900 sec. comme le montre cette trajectoire. En ce qui concerne la trajectoire (4), nous tirons la même conclusion : une performance inférieure à celle présentée par la trajectoire (3) est observée. Ceci s'explique par le fait que la fermeture de la boucle se fait moins souvent ($t_{i+1} - t_i = 40$).

3) Perturbation du vecteur d'état : Figure (II-3)

La perturbation est maintenant proportionnelle à la valeur du vecteur de l'état, et telle que le schéma fonctionnel du processus devient :



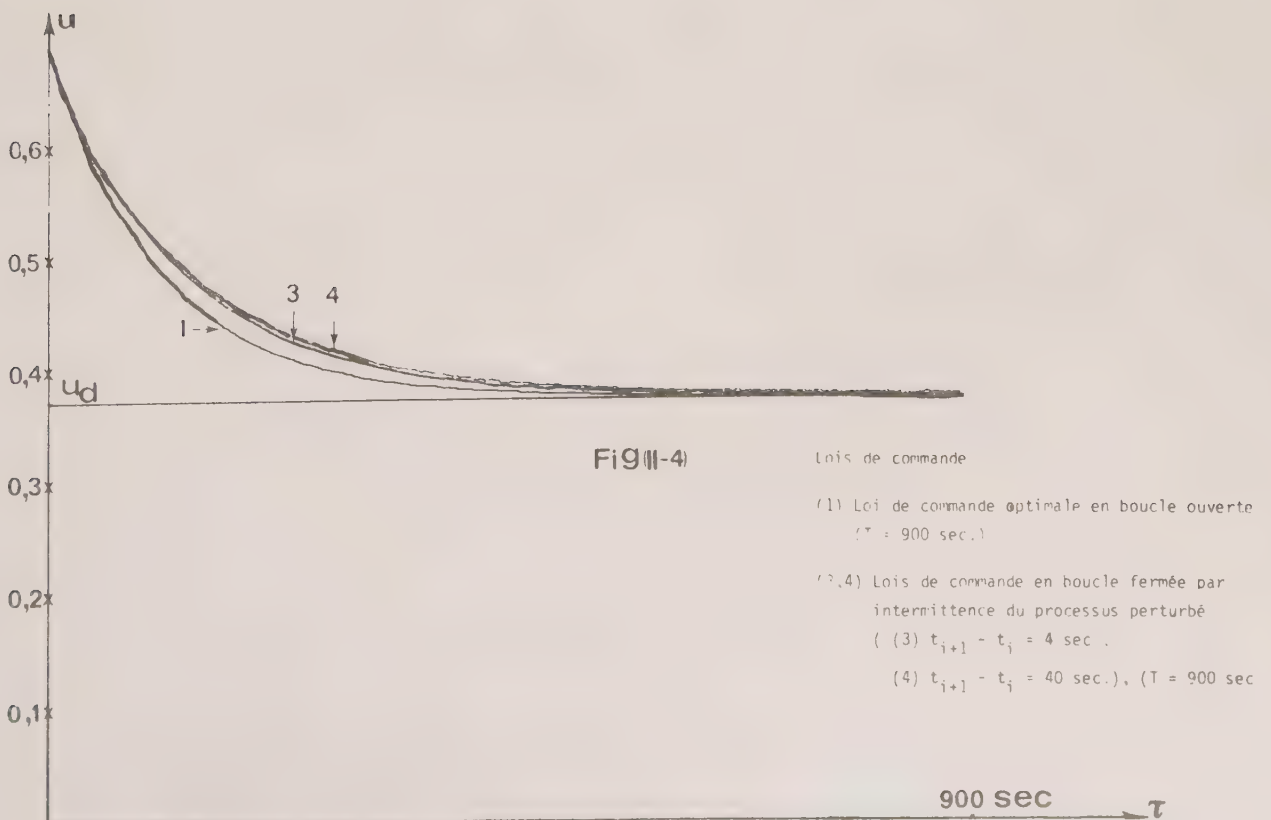
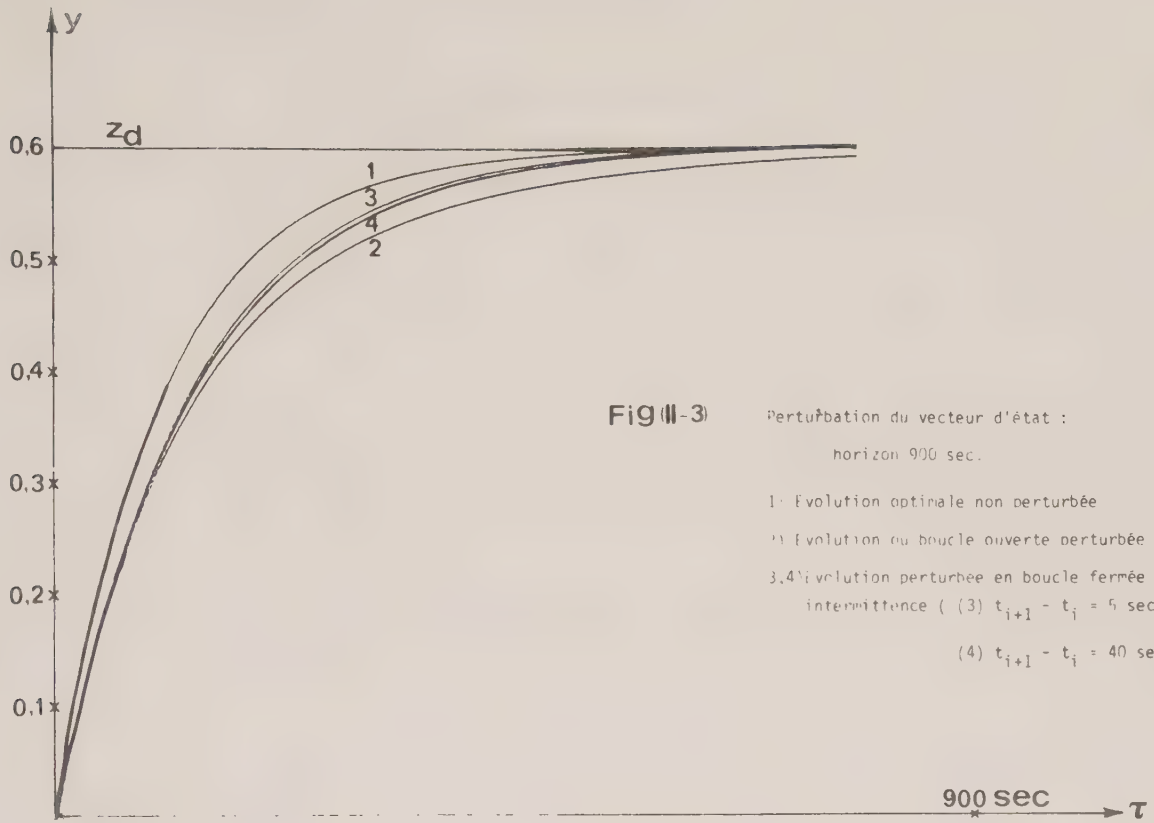


où y_r est le vecteur d'état réel. La figure (II-3) représente :

- trajectoire (1) : trajectoire de référence.
- trajectoire (2) : l'évolution de l'état du processus perturbé, commandé en boucle ouverte. On observe un écart important par rapport à l'évolution (1) et une erreur permanente ϵ_2 .
- trajectoire (3) : l'évolution de l'état du processus perturbé, commandé en boucle fermée par intermittence ($t_{i+1} - t_i = 5 \text{ sec.}$). L'évolution (3) s'approche de (1) et l'erreur tend vers $\epsilon_1 < \epsilon_2$ avec $t \rightarrow T$.
- trajectoire (4) : l'évolution de l'état du processus perturbé, commandé en boucle fermée par intermittence ($t_{i+1} - t_i = 40 \text{ sec.}$). On y remarque un écart sensible pendant le régime transitoire par rapport à l'évolution (3) dû au fait que la période de calcul de la commande est nettement plus grande que la précédente.

Nous remarquerons dans ces différents cas l'effet régulateur en boucle fermée par intermittence. Cette commande conduit l'évolution d'état à s'approcher mieux de l'évolution idéale dans le cas où la fermeture de la boucle se fait plus souvent, cette performance au niveau de l'évolution d'état se fait évidemment au prix d'une "dépense" différente de l'optimale, ce qu'illustre la figure (II-4) correspondant au troisième exemple de perturbation.

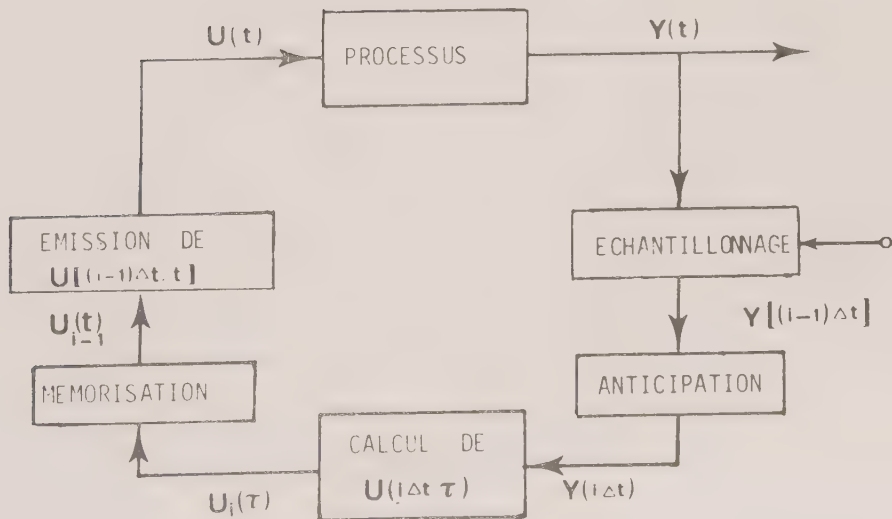
trajectoire (1) : loi de la commande optimale en boucle ouverte
trajectoire (2), (3) : loi de commande en boucle fermée par
intermittence pour $(t_{i+1} - t_i) = 5 \text{ sec.}$,
 $t_{i+1} - t_i = 40 \text{ sec.}$



II.3. Commande en boucle périodiquement fermée

Le mode de commande que nous proposons consiste à calculer la loi de commande suivant un procédé rythmé par une horloge H de période Δt et déterminé par les étapes suivantes :

- mesurer l'état à l'instant $(i-1)\Delta t$, en déduire une estimation de l'état à l'instant $i\Delta t$, $i \in \{0,1,2,\dots\}$.
- calculer (en temps accéléré) la loi de commande $\hat{U}(i\Delta t, \tau) = \hat{U}_i(\tau)$ en prenant l'état estimé $\hat{Y}(i\Delta t)$ comme état initial du processus à l'instant $i\Delta t$.
- appliquer en temps réel $\hat{U}_i(\tau)$ au processus de l'instant $i\Delta t$ à $(i+1)\Delta t$
- faire $i = i+1$ et recommencer la séquence ; ceci se schématise par :



FIGURE(II-5) : Procédure de commande pour $t \in [(i-1)\Delta t, i\Delta t[$

Nous admettrons désormais que le vecteur d'état du modèle utilisé est entièrement accessible à la mesure. Le problème de la construction d'un observateur pour les composants inaccessibles, ou celui de la recherche de solutions sous-optimales (contraintes

de structure) ne sera pas abordé dans le cadre de notre travail.

II.4. Cas des systèmes linéaires stationnaires sans contraintes et avec coût : quadratique

Dans le but de caractériser et d'interpréter la stratégie de commande, nous allons étudier le cas particulier standard en supposant de plus la période de fermeture de la boucle infiniment petite ($\Delta t \rightarrow 0$).

II.4.1. Caractérisation

Nous distinguerons entre l'instant présent t , l'instant courant τ sur l'horizon $[t, t+T]$, et le temps restant $\theta = t+T-\tau$.

Soit le système linéaire stationnaire décrit par l'équation différentielle vectorielle :

$$(2-1) \quad \dot{Y}(\tau) = AY(\tau) + BU(\tau) \quad , \quad Y \in \mathbb{R}^n \quad , \quad U \in \mathbb{R}^m$$

et le critère quadratique :

$$(2-2) \quad J(t) = \frac{1}{2} \int_t^{T+t} [Y^*(\tau) Q Y(\tau) + U^*(\tau) R U(\tau)] d\tau$$

où R est une matrice $m \times m$ symétrique, définie positive ;
 Q est une matrice $n \times n$ symétrique, définie non négative.

On cherche $\hat{U}(t, \tau)$ telle que :

$$(2-3) \quad J[\hat{U}(t, \tau)] = \min J[U(t, \tau)]$$

comme on a vu au premier chapitre, il existe une relation entre la commande et l'état telle que :

$$(2-4) \quad \hat{U}(t, \tau) = -R^{-1}B^* K(\theta) Y(\tau)$$

où $K(\theta)$ est une matrice symétrique, définie positive solution de l'équation différentielle matricielle non linéaire de Riccati :

$$(2-5) \quad \frac{dK}{dt} = K(\theta) A + A^* K(\theta) - K(\theta) B R^{-1} B^* K(\theta) + Q$$

avec : $K(0) = 0$

La commande réalisée effectivement à l'instant présent est :

$$(2-6) \quad U(t) = \hat{U}(\tau)_{\tau=t} \quad ; \quad U(t) = \hat{U}(t, \tau)_{\tau=t} = \hat{U}(t, t)$$

elle correspond donc au feedback permanent :

$$(2-7) \quad U(t) = -R^{-1} B^* K(T) Y(t)$$

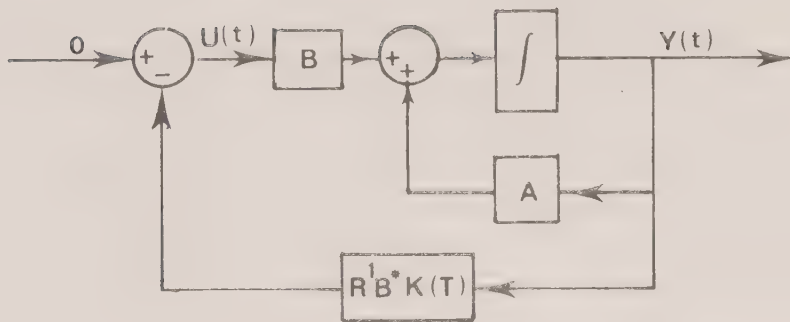


FIGURE (II-6) : Feedback équivalent à la commande en boucle fermée par intermittence.

II.4.2. Stabilité

Le système asservi réalisé a comme équation d'état :

$$(2-8) \quad \frac{dY}{d\tau} = [A - B R^{-1} B^* K(T)] Y(\tau)$$

Il est important de savoir si la commande ainsi effectuée garantit un fonctionnement permanent asymptotiquement stable.

Une condition suffisante de stabilité peut être aisément établie en considérant la fonction :

$$(2-9) \quad V(Y) = \frac{1}{2} Y^* K(T) Y$$

La dérivée de V par rapport au temps s'écrit :

$$\frac{dV}{d\tau} = Y^* K(T) \frac{dY}{d\tau},$$

d'où :

$$\frac{dV}{d\tau} = Y^* [K(T) A - K(T) B R^{-1} B^* K(T)] Y$$

soit encore, en tenant compte de (2-5) avec $\theta = T$:

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{1}{2} Y^* [\dot{K}(T) - Q - K(T) B R^{-1} B^* K(T)] Y$$

La fonction V sera de Ljapunov si :

$$(2-10) \quad \forall Y : Y^* \dot{K}(T) Y < Y^* [Q + K(T) B R^{-1} B^* K(T)] Y$$

L'inéquation (2-10) constitue ainsi une condition suffisante de stabilité ; on est certain qu'elle est toujours satisfaite lorsque T prend des valeurs suffisamment élevées, puisqu'alors K(T) tend vers 0, alors que $Q + K(T) B R^{-1} B^* K(T)$ est une forme quadratique définie non négative.

II.4.3. Interprétation

On note qu'un résultat identique à cette optimisation à horizon glissant serait obtenu en optimisant sur un horizon infini le critère :

$$(2-11) \quad J^i = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (Y^* Q^i Y + U^* R U) d\tau$$

avec :

$$(2-12) \quad Q^i = Q - \left(\frac{dK}{d\tau} \right)_{\tau=T}$$

En effet la solution de ce deuxième problème consiste en un feedback stationnaire, défini par le gain matriciel K' solution de l'équation algébrique :

$$(2-13) \quad K'A + A^* K' - K' B R^{-1} B^* K' + Q' = 0$$

En rapprochant (2-5) et (2-13) on voit que l'on a $K' = K(T)$ lorsque Q' est défini suivant (2-12). Cependant le problème à horizon infini a de sens que si la matrice Q' est définie non négative, ce qui entraîne d'ailleurs la stabilité asymptotique de la boucle fermée.

Nous en concluons donc que :

Si la matrice $Q - \dot{K}(T)$ est définie non négative (hypothèse H_0), la commande optimale sur l'horizon glissant T donne un fonctionnement asymptotiquement stable, équivalent à la minimisation sur horizon infini d'un critère admettant $Q - \dot{K}(T)$ comme matrice de pondération de l'écart d'état.

II.4.4. Etude de l'hypothèse H_0

Lorsque $T \rightarrow 0$; $\dot{K}(T) \rightarrow Q$

Lorsque $T \rightarrow \infty$; $\dot{K}(T) \rightarrow 0$

Ceci ne suffit pas à nous autoriser à dire que :

$$\forall y : 0 < Y^* \dot{K}(T) Y < Y Q Y$$

ce qui équivaldrait à :

$$\forall y : 0 < Y^* [Q - \dot{K}(T)] Y < Y Q Y$$

On observe cependant en raison de la continuité de $\dot{K}(\theta)$, qu'on peut toujours satisfaire l'hypothèse (H_0) en prenant un horizon suffisamment long.

Nous allons maintenant chercher une interprétation de H_0 ; posons :

$$S(Y, \tau) = \frac{1}{2} Y^*(\tau) K(\theta) Y(\tau)$$

quantité représentant la valeur optimale du critère J pour une évolution allant de l'instant τ à l'instant $T+\tau$.

D'après l'équation d'Hamilton-Jacobi, $\frac{\partial S}{\partial \tau}(Y, \tau) = -\frac{1}{2} Y^*(\tau) \dot{K}(\theta) Y(\tau)$ est l'opposé de la valeur optimale H de l'hamiltonien H , qui est constante pour un système stationnaire ; on en déduit en particulier, par $\tau = t$ et $\tau = t + T$:

$$\frac{1}{2} Y^*(t) \dot{K}(T) Y(t) = \frac{1}{2} Y^*(t+T) \dot{K}(0) Y(t+T)$$

soit puisque $\dot{K}(0) = Q$:

$$(2-14) \quad Y^*(t) \dot{K}(T) Y(t) = Y^*(t+T) Q Y(t+T)$$

Cette dernière relation implique que $\dot{K}(T)$ est une matrice définie non négative.

En conséquence, on notera que dans le cas où l'hypothèse H_0 est satisfaite, le critère J' accorde moins d'importance au terme de "précision" qu'un critère $\tilde{J}$ tel que :

$$\tilde{J} = \frac{1}{2} \int_0^\infty (Y^* Q Y + U^* R U) dt ;$$

De ce point de vue, la commande à horizon glissant T engendre une évolution sous-optimale par rapport à l'évolution minimisant $\tilde{J}$.

Introduisons enfin la matrice fondamentale Φ du système régi par :

$$(2-15) \quad \dot{Y}(\tau) = [A - B R^{-1} B^* K(\theta)] Y(\tau) .$$

On a par définition :

$$Y(\tau) = \Phi(t, \tau) Y(t),$$

avec :

$$\Phi(t, t) = I$$

On a par ailleurs, compte tenu du fait que l'horizon est glissant, c'est-à-dire qu'on applique la même politique à tout instant présent t :

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(0, \tau - t)$$

on aura donc :

$$Y(t+T) = \Phi(0, T) Y(t)$$

d'où, en rapportant dans (2-14) :

$$\dot{K}(T) = \Phi^*(0, T) Q \Phi(0, T)$$

L'hypothèse (H_0) est ainsi équivalente à l'hypothèse (H_1)

(H_1) : $[Q - \Phi^*(0, T) Q \Phi(0, T)]$ est définie non négative.

Cette hypothèse s'interprète comme le fait que :

$$\forall Y(t) : Y^*(\tau) Q Y(\tau) \Big|_{\tau=t+T} < Y^*(\tau) Q Y(\tau) \Big|_{\tau=t}$$

Nous aurons ainsi équivalence entre la commande à horizon glissant et une commande (asymptotiquement stable) à horizon infini dès que l'optimisation de J sur $[0, T]$ fait diminuer (de manière non nécessairement monotone) "l'erreur" $Y^* Q Y$ du système.

II.4.5. Conditions suffisantes

A titre d'exemple, montrons que les conditions suivantes impliquent (H_0) :

$$(2-16) \quad (A^* Q + Q A) \text{ est définie non positive,}$$

(2-17) $(B R^{-1} B^* A^* + A B R^{-1} B^*)$ est définie non positive.

Conditions qui se réduisent d'ailleurs à la coercivité de A lorsque Q et $BR^{-1}B^*$ se réduisent à la forme αI , où α est un scalaire. En effet, compte tenu de (2-5) et (2-15) on vérifie que :

$$\frac{d}{d\tau} \left[Y^*(\tau) [K(\theta)A + A^* K(\theta)] Y(\tau) \right] = - Y^* (A^* Q + Q A) Y - (KY)^* [BR^{-1} B^* A^* + ABR^{-1} B^*] (KY)$$

en raison des conditions (2-16) et (2-17) la quantité précédente est définie non négative.

Il en résulte notamment que :

$$Y^*(t) [K(T)A + A^* K(T)] Y(t) < Y^*(t+T) [K(0)A + A^* K(0)] Y(t+T)$$

d'où en raison de la nullité de la valeur initiale de $K(e)$:

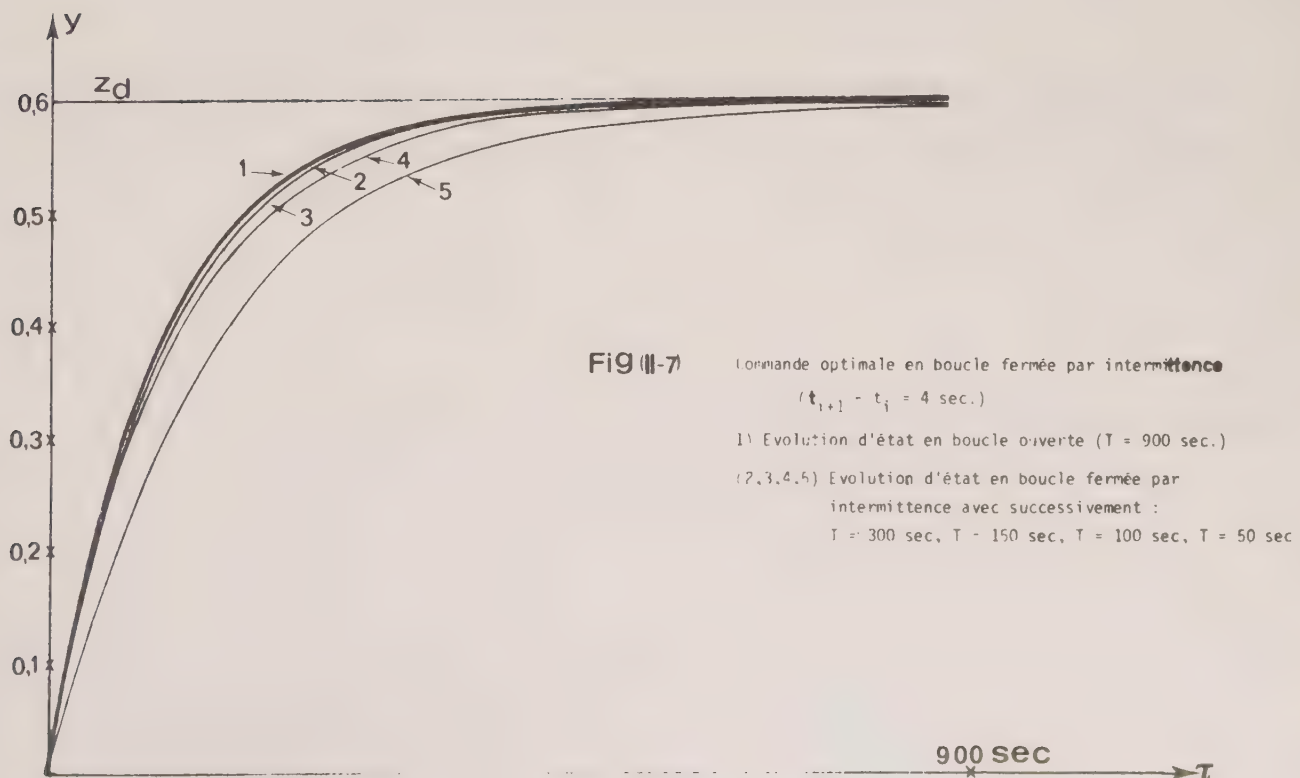
$$Y^*(t) [K(T)A + A^* K(T)] Y(t) < 0$$

$Y(t)$ pouvait être quelconque, la matrice $K(T)A + A^* K(T)$ est définie non positive, comme la matrice $-K(T)BR^{-1}B^*K(T)$; on déduit alors de l'équation (2-5) que $Q - \dot{K}(T)$ est définie non négative.

II.4.6. Exemple

A titre d'illustration de ce que nous venons d'exposer en ce qui concerne les systèmes linéaires avec critère quadratique, nous présentons sur la figure (II-7) différentes courbes relatives à des différents horizons représentant les évolutions d'état du processus décrit en (I-4) où les conditions (2-16) et (2-17) sont vérifiées ; par conséquent l'hypothèse H_0 l'est aussi et chacune de ces évolutions est équivalente à une évolution optimale par rapport à un critère J' d'horizon infini.

La trajectoire (1) est celle de l'évolution du processus en boucle ouverte sur un horizon de 900 sec. ; elle nous servira comme référence dans la mesure où on la considère comme étant proche de celle d'une commande optimale sur un horizon infini : les courbes 2, 3, 4 et 5 représentent l'évolution du processus en boucle fermée par intermittence avec Δt commun ($\Delta t = 4$ sec.), les horizons sont respectivement de 300 sec, 150 sec, 100 sec et 50 sec. On remarque que l'écart $y(t) - y_d$ augmente avec la diminution de l'horizon, donnant ainsi une évolution sous-optimale (parce que le poids de la précision $Q - \dot{K}(T) = Q'$ dans le critère équivalent J' diminue). Donc dans le cas de commande portant essentiellement sur la régulation du processus, il semble nécessaire de choisir un horizon relativement grand (supérieur à la constante de temps du processus par exemple, elle est égale à 200 sec. dans notre exemple), mais ceci ne passe pas sans inconvénients, ce que nous allons évoquer au paragraphe suivant.



II.4.7. Application. Politique utilisée

Nous considérerons désormais que notre but est d'appliquer une loi de commande optimisant le fonctionnement du système sur un horizon infini. Comme dans le cas général (systèmes non linéaires, contraintes, etc...) nous ne pouvons en effectuer le calcul a priori, nous devons l'effectuer en ligne ; nous n'avons pas intérêt à utiliser un horizon T très grand ("quasi-infini") car cela majore la durée des calculs, ce qui induit deux inconvénients majeurs :

- augmentation du retard entre la mesure de l'état initial et l'instant où l'on dispose d'une loi de commande optimale partant de cet instant ; or l'anticipation effectuée pour compenser ce temps de calcul n'est fiable que pour un retard faible ;
- augmentation de la période de fonctionnement en boucle ouverte entre deux mesures successives de l'état réel, c'est-à-dire majoration du temps de réponse à l'apparition de perturbations extérieures.

Etant donné le critère à minimiser :

$$J_{\infty} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [Y^* Q_{\infty} Y + U^* R U] dt$$

nous adopterons en pratique un critère différent, mais donnant un résultat analogue dans le cadre d'une optimisation à horizon glissant :

$$J_T = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} [Y^* Q Y + U^* R U] d\tau$$

l'horizon T sera choisi assez court pour que le temps de calcul Δt puisse être considéré comme négligeable ; la matrice de pondération Q devrait satisfaire la relation :

$$Q = Q_{\infty} + \dot{K}(T).$$

On ne peut déterminer a priori Q à partir de Q_{∞} au moyen de cette relation, car $\dot{K}(T)$ dépend du choix effectué pour Q... On procédera donc de façon empirique, soit en partant de Q et en examinant si la valeur correspondante de Q_{∞} correspond sensiblement au critère qu'on veut minimiser, soit en partant de Q_{∞} et en modifiant graduellement cette matrice au fur et à mesure qu'on réduit l'horizon.

En ce qui concerne cette dernière approche, on pourrait formaliser un processus de correction récurrent procédant par petites touches successives ; nous ne le ferons pas car les systèmes linéaires à critère quadratique ne constituent qu'un exemple, destiné à l'interprétation d'une méthode plus généralement destinée aux systèmes non-linéaires, auxquels nous ne pourrions étendre la démarche de modification du critère pour compenser la réduction de l'horizon.

II.5. Période de fermeture Δt non infiniment petite

Le processus se décrit dans ce cas par l'ensemble des arcs solutions de :

$$(2-18) \quad \dot{Y}_i(\tau) = [A - B K^{-1} B^* K(\theta)] Y_i(\tau) , \quad \tau \in [t_i, t_{i+1}]$$

avec la condition de raccordement :

$$Y_{i+1}(i\Delta t) = Y_i(i\Delta t)$$

Rappelons que $\theta = t_i + T - \tau$; ici $\theta \in [t - \Delta t, T]$

nous remarquons que la fonction $K(\theta)$ est la même pour tout i .

Dans un intervalle Δt petit par rapport à l'horizon T on peut écrire :

$$K(\theta) \simeq K(T) + (T - \theta) \dot{K}(T)$$

l'équation (2-15) se réécrit alors :

$$(2-19) \quad \dot{Y}_i(\tau) = [A - B R^{-1} B^* K(T) - (T - \theta) B R^{-1} B^* \dot{K}(T)] Y_i(\tau)$$

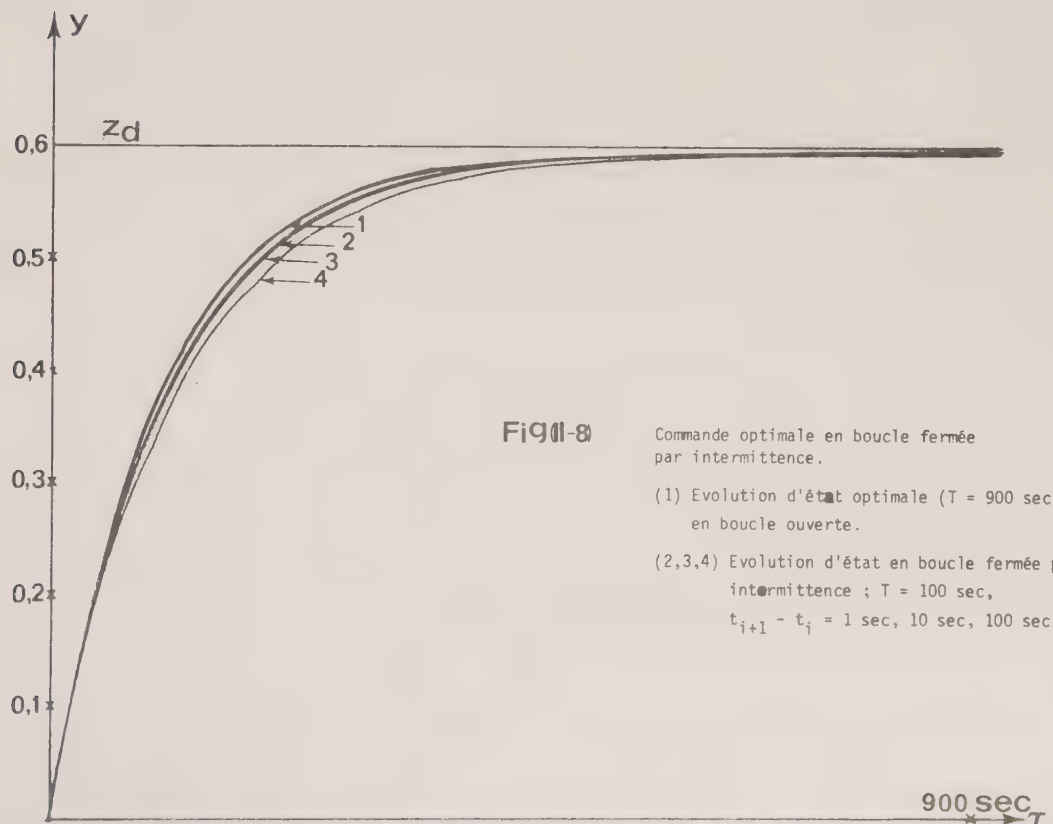
L'intervalle $(T - \theta)$ étant inférieur à Δt et $B R^{-1} B^* K(T)$ étant borné la stabilité du système

$\dot{Y}(\tau) = [A - B R^{-1} B^* K(T)] Y(\tau)$ implique celle du système périodique (2-18) en vertu d'un théorème sur de petites perturbations périodiques d'un système stationnaire [15] .

Nous remarquons que la grandeur de Δt peut être fonction de l'horizon : lorsque T est important, $K(\theta)$ est peu différent de $K(T)$ pendant un temps Δt relativement grand.

Nous avons étudié sur un exemple l'influence du rapport $\Delta t/T$; sur la figure (II-8) la trajectoire (1) représente l'évolution en boucle ouverte avec $T = 900$ sec ; les courbes 2, 3 et 4 représentent l'évolution du processus en boucle fermée par intermittence avec comme horizon commun $T = 150$ sec., Δt est 1 sec., 10 sec. et 100 sec. ; on y remarque que :

- a) l'écart entre deux évolutions reste marginal tant que $\frac{\Delta t}{T}$ reste petit (courbe 2 et 3), il n'est pas de même dans le cas de courbe (4) où $\Delta t = 100$ sec.
- b) l'écart $\varepsilon = y(t) - y_d$ décroît avec la diminution de Δt .
- c) l'écart $y(t) - y_d$ lorsque le processus est commandé en boucle fermée par intermittence est inférieur à celui du même processus commandé en boucle ouverte sur un horizon T , c'est ce que montreront les courbes (2) et (4) au point (100 sec., m).



II.6. Conclusion

Ainsi nous venons de proposer un mode de conduite reliant la commande à l'état de manière intermittente, applicable à priori à tout processus.

Lorsque la période d'échantillonnage de l'état est très petite devant l'horizon, nous avons montré dans le cas de processus linéaires avec critère de performance quadratique, sous l'hypothèse H_0 ou son équivalent (H_1) , que l'évolution du système est identique à celle du même processus commandé optimalement suivant un critère à horizon infini, donnant généralement à la précision un poids inférieur à celui du critère utilisé effectivement.

Inversement, on peut envisager une commande faisant approcher l'évolution (non perturbée) de celle qu'engendre une commande minimisant un critère imposé sur un horizon infini J_∞ .

Nous allons maintenant nous intéresser à la réalisation effective d'un tel mode de régulation.

A N N E X E

ETUDE PARTICULIERE DES SYSTEMES DU 1° ORDRE

Nous nous proposons d'illustrer la méthode de commande proposée en étudiant en détail son application à des systèmes du 1° ordre.

Soit le système décrit par l'équation différentielle scalaire :

$$\dot{y} = ay + bu \quad , \quad y, u \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = y_0$$

et le critère d'optimalité :

$$J = 0,5 \int_0^T (q y^2 + u^2) dt \quad .$$

Le poids r de la commande u peut être pris égal à 1 sans restreindre la généralité.

1 - COMMANDE EN BOUCLE OUVERTE

En posant $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 q}$ et $\theta_0 = \frac{1}{2\alpha} \text{Log} \frac{\alpha+a}{\alpha-a}$, on établit sans peine les expressions suivantes de la commande optimale $\hat{u}$ sur $[0, T]$ et de l'évolution optimale $\hat{y}$ correspondante, en fonction du "temps restant" $\theta = T-t$:

$$\hat{u}(\theta) = -\frac{y_0}{b} \cdot \frac{a \operatorname{ch} \alpha (\theta - \theta_0) + \alpha \operatorname{sh} \alpha (\theta - \theta_0)}{\operatorname{ch} \alpha (T - \theta_0)}$$

$$\hat{y}(\theta) = y_0 \frac{\operatorname{ch} \alpha (\theta - \theta_0)}{\operatorname{ch} \alpha (T - \theta_0)}$$

2 - COMMANDE EN BOUCLE FERMEE SUR L'HORIZON [0,T]

La commande précédente peut être obtenue en boucle fermée :

$$\hat{u}(\theta) = -b \hat{p}(\theta)$$

avec $p(\theta)$, variable d'état adjoint, donnée par :

$$\hat{p}(\theta) = k(\theta) \cdot \hat{y}(\theta)$$

Le gain variable $k(\theta)$ est solution de l'équation différentielle de Ricatti :

$$\dot{k}(\theta) = q + 2ak - b^2 k^2$$

$$k(0) = 0$$

qui a pour solution la fonction monotone croissante :

$$k(\theta) = \frac{a}{b^2} \left(1 + \frac{\alpha}{a} \operatorname{th} \alpha (\theta - \theta_0) \right)$$

3 - COMMANDE A HORIZON GLISSANT (REGULATION)

On assure un feedback permanent dont le gain est égal à $k(T)$; le système asservi est donc régi par :

$$\dot{y} = [a - b^2 k(T)] y$$

soit :

$$\dot{y} = -\alpha [\operatorname{th} \alpha (T - \theta_0)] y$$

Ce système est toujours stable si T est supérieur à θ_0 , ce qui, en particulier, est toujours vérifié lorsqu'on commande un processus stable en boucle ouverte ; en effet $a < 0$ entraîne $\theta_0 < 0$, et donc :

$$\forall T : - \operatorname{th} \alpha (T - \theta_0) < 0 .$$

On notera que la condition suffisante

$$\dot{k}(T) < q + b^2 k^2$$

donne ici le même résultat, tandis que la condition H_0

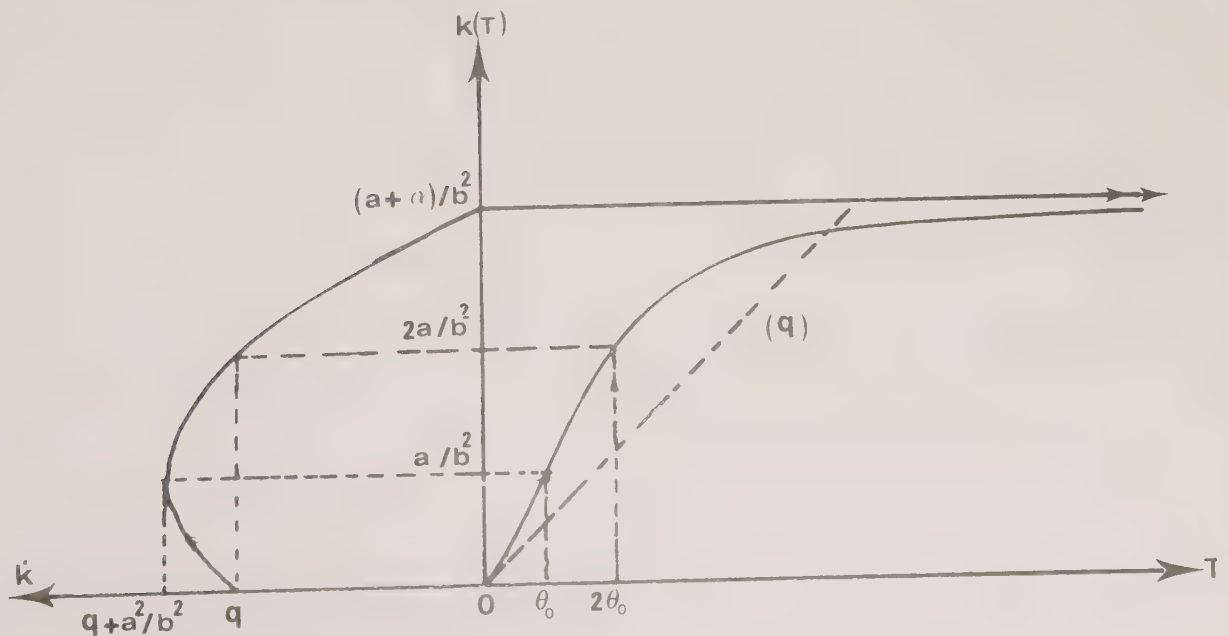
$$\dot{k}(T) < q$$

impose :

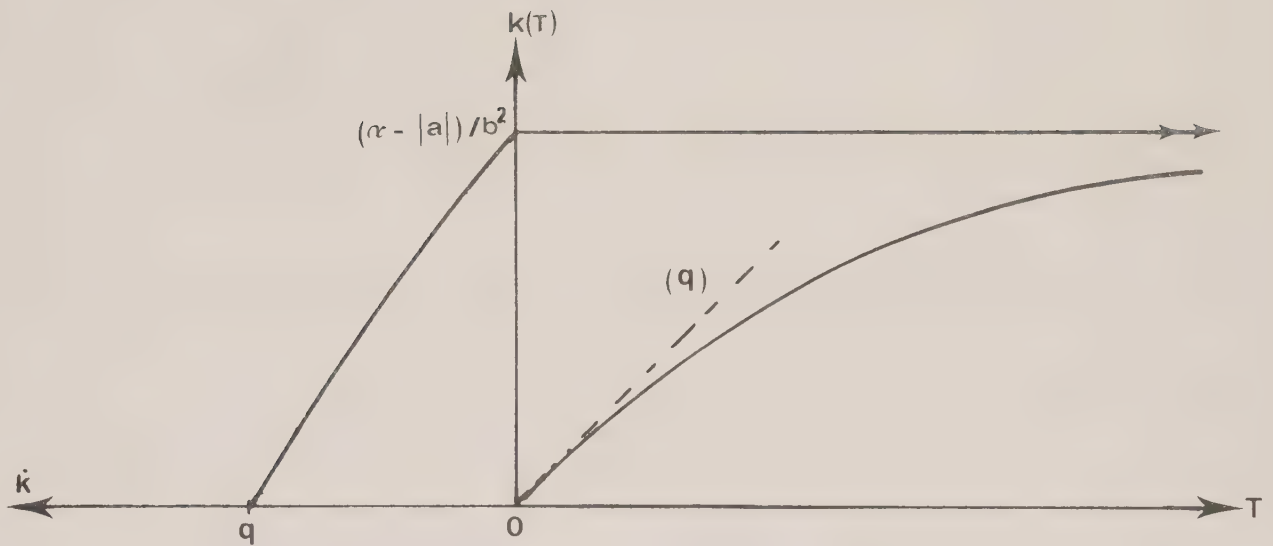
$$T > 2\theta_0$$

ce qui est d'ailleurs toujours réalisé pour $a < 0$ (processus stable).

Les résultats précédents sont illustrés par les figures ci-après, correspondant respectivement à un processus instable et à un processus stable.



(1) : Gain de la rétroaction optimale pour un processus instable ($a > 0$)



(2) : Gain de la rétroaction optimale pour un processus stable ($a < 0$)

Remarque : On note ici que la condition nécessaire et suffisante de stabilité peut s'écrire :

$$\ddot{k}(T) < 0$$

Dans le cas général la condition analogue :

$$\ddot{K}(T) \text{ définie négative}$$

suffit à assurer la stabilité asymptotique de la régulation, car la fonction

$$V = \frac{1}{2} Y^* \dot{K}(T) Y$$

est alors fonction de Ljapunov pour le système ; en effet d'une part $\dot{K}(T)$ est une matrice définie positive, et d'autre part :

$$\frac{dV}{dt} = Y^* \dot{K}(T) \dot{Y} = Y^* \dot{K}(T) [A - BR^{-1} B^* K(T)] Y ;$$

or :

$$\ddot{K}(\theta) = \frac{d}{d\theta} \left[Q + 2 KA - KBR^{-1} B^* K \right] = 2 \dot{K}(\theta) \left[A - BR^{-1} B^* K \right]$$

et par conséquent :

$$\frac{dV}{dt} = 2 Y^* \ddot{K}(T) Y < 0, \quad \forall Y \neq 0$$

4 - COMMANDE EN BOUCLE FERMEE PAR INTERMITTENCE (REGULATION, AVEC $\Delta t \neq 0$)

On réalise l'asservissement du processus au moyen d'une rétroaction périodique, de période Δt et de gain :

$$t \in [i\Delta t, (i+1)\Delta t] : \quad k = [k(0)]_{\theta=(T+i\Delta t)-t}$$

Le système asservi est donc régi par l'équation différentielle à coefficient périodique :

$$\dot{y} = -\alpha \left[\text{th } \alpha (T+i\Delta t - \theta_0 - t) \right] y$$

$$y(0) = y_0$$

Son évolution se traduit par une succession d'arcs de courbe tels que (cf. § 2) :

$$t \in [i\Delta t, (i+1)\Delta t]$$

$$y_i(t) = y(i\Delta t) \cdot \frac{\text{ch } \alpha [T+i\Delta t - \theta_0 - t]}{\text{ch } \alpha [T - \theta_0]}$$

Le système sera asymptotiquement stable si et seulement si la suite $y(i\Delta t)$ est convergente, c'est-à-dire si :

$$\text{ch } \alpha [T - \theta_0 - \Delta t] < \text{ch } \alpha [T - \theta_0]$$

d'où :

$$\Delta t < 2 (T - \theta_0)$$

Conclusions :

- Pour $T > 2\theta_0$ (condition suffisante de stabilité de la commande à horizon glissant, équivalente à l'hypothèse H_0 comme nous l'avons vu au § 3), la commande en boucle fermée par intermittence est asymptotiquement stable quelque soit la période Δt d'échantillonnage de l'état entre les valeurs 0 et T ; c'est d'ailleurs toujours le cas si le processus autonome est stable ($\theta_0 < 0$).
- Pour $\theta_0 < T < 2\theta_0$, la commande est possible, mais il convient de limiter Δt .
- Pour $T < \theta_0$: le mode de commande proposé n'est pas applicable.

C H A P I T R E III

PROBLEMES LIES AU CALCUL DE LA COMMANDE EN BOUCLE FERMEE PAR INTERMITTENCE

INTRODUCTION

Nous avons vu au deuxième chapitre que la commande en boucle fermée par intermittence consiste à calculer pendant l'intervalle $[(i-1)\Delta t, i\Delta t]$ la loi de commande optimale $\hat{u}(\tau)$ à appliquer au processus à partir de l'instant $i\Delta t$; ceci implique que l'on estime l'état du processus à l'instant futur $i\Delta t$ à partir d'une mesure de l'état du processus à l'instant $(i-1)\Delta t$.

La détermination de la loi de commande optimale nécessite la résolution du système d'équations d'optimalité, différentes méthodes permettant d'y aboutir dans le cas de grands systèmes, nous nous sommes intéressés à celle ayant fait l'objet de plusieurs travaux de la part des Laboratoires d'Analyse Numérique et d'Automatique de Besançon, et expérimenter sur calculateur hybride par B. LANG [9] .

Nous allons dans ce chapitre exposer différentes méthodes d'estimation d'état portant sur les systèmes non linéaires et tout particulièrement ceux décrits par une équation d'état linéaire stationnaire, ce type de modèle représentant le processus thermique sur lequel porteront les applications des cinquième et sixième chapitres. Ensuite nous présentons l'algorithme de décentralisation-coordination par relaxation.

III-1. Estimation d'état initial

Soit le processus décrit par l'équation non linéaire :

$$(3-1) \quad \dot{y} = f(y,u) \quad \text{avec} : y \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m,$$

à l'instant $i\Delta t$ on cherche à estimer son état à l'instant $(i+1)\Delta t$, compte-tenu des mesures directes effectuées sur le processus ; soit $y_r(i\Delta t)$ l'état réel du processus à l'instant $i\Delta t$.

L'estimation peut être envisagée par différentes méthodes dont l'application est plus ou moins favorable suivant le processus auquel on a affaire.

III.1.1. Estimation par extrapolation linéaire

En fonction des mesures effectuées aux instants antérieurs on peut envisager d'estimer l'état à l'instant $(i+1)\Delta t$ par extrapolations d'ordres différents ; dans le cas d'extrapolations d'ordre (1), l'état estimé $\hat{y}[(i+1)\Delta t]$ se donne par :

$$(3-2) \quad \hat{y}[(i+1)\Delta t] = 2 y_r(i\Delta t) - y_r[(i-1)\Delta t]$$

ou encore à l'aide des mesures plus récentes que $y_r[(i-1)\Delta t]$. Cette méthode peut être valable dans le cas des systèmes à variations lentes ou lorsque l'on ne dispose que d'un modèle grossier de processus.

III.1.2. Estimations basées sur le modèle

Dans le cas où l'on dispose du modèle mathématique assez fin d'un processus, on peut envisager une estimation d'état initial à partir du modèle et des mesures de l'état réel ; on y distingue deux possibilités suivant la longueur de la période de fermeture de la boucle Δt .

Soit $\hat{y}(i\Delta t)$ l'état estimé à l'instant $i\Delta t$, $\hat{u}(\tau)$, la loi de commande optimale calculée en adoptant $\hat{y}(i\Delta t)$ comme état initial.

a) Période relativement petite

En s'appuyant sur le fait que :

$$[\dot{y}]_{i\Delta t} \approx \frac{y[(i+1)\Delta t] - y(i\Delta t)}{\Delta t}$$

donc :

$$(3-3) \quad y[(i+1)\Delta t] = y(i\Delta t) + \Delta t \cdot f[y(i\Delta t), u(i\Delta t)]$$

remplaçant $y(i\Delta t)$ par $y_r(i\Delta t)$ $u(i\Delta t)$ par $\hat{u}(i\Delta t)$ on obtiendra alors:

$$\tilde{y}[(i+1)\Delta t] = y_r(i\Delta t) + \Delta t \cdot f[y_r(i\Delta t), \hat{u}(i\Delta t)]$$

b) Période quelconque

La résolution du système :

$\dot{\tilde{y}} = f[\tilde{y}(\tau), \hat{u}(\tau)]$ avec $y_r(i\Delta t)$ comme état initial nous donne $\tilde{y}[(i+1)\Delta t]$, fonction de l'état estimé $\tilde{y}(i\Delta t)$ et de l'état réel $y_r(i\Delta t)$.

En cas d'absence de perturbations pendant l'intervalle $[i\Delta t, (i+1)\Delta t]$ l'état $\tilde{y}(i+1)\Delta t$ sera réel ; sinon un écart dû à l'existence des perturbations persiste, qu'on saura mieux combattre lorsque on arrive à diminuer au plus possible la période Δt , ou encore en ajoutant des termes correctifs calculés en fonction des mesures réelles sur l'état.

Nous allons détailler et illustrer cette méthode dans le cas des systèmes linéaires.

c) Cas des systèmes linéaires

Soit le système linéaire décrit par :

$$(3-4) \quad \dot{\tilde{y}} = A\tilde{y} + Bu$$

En appliquant la loi de commande $\hat{u}(\tau)$ au système (3-4), l'évolution optimale "théorique" de l'état aura comme expression :

$$(3-5) \quad \hat{y}(\tau) = \phi(\tau, i\Delta t) \tilde{y}(i\Delta t) + \int_{i\Delta t}^{\tau} \phi(\sigma, \tau) \cdot B \cdot u(\sigma) d\sigma$$

avec $\phi(\tau, i\Delta t)$ matrice de transition du système $\dot{y} = Ay$.

D'autre part l'application de la loi $\hat{u}(\tau)$ au processus réel, qu'on considère toujours représenté par l'équation (3-4) mais avec $y_r(i\Delta t)$ pour état initial, conduira à une évolution d'état défini par :

$$(3-6) \quad y(\tau) = \phi(\tau, i\Delta t) y_r(i\Delta t) + \int_{i\Delta t}^{\tau} \phi(\sigma, \tau) B \cdot u(\sigma) d\sigma$$

compte-tenu de (3-5) et de (3-6) à l'instant $\tau = (i+1)\Delta t$, il vient :

$$y[(i+1)\Delta t] = \hat{y}[(i+1)\Delta t] + \phi[(i+1)\Delta t, i\Delta t] \cdot [y_r(i\Delta t) - \tilde{y}(i\Delta t)]$$

soit en posant

$$\tilde{y}[(i+1)\Delta t] = y[(i+1)\Delta t]$$

et en notant que :

$$\phi[(i+1)\Delta t, i\Delta t] = e^{A\Delta t}$$

$$(3-7) \quad \tilde{y}[(i+1)\Delta t] = \hat{y}[(i+1)\Delta t] + e^{A\Delta t} [y_r(i\Delta t) - \tilde{y}(i\Delta t)]$$

Ayant mémorisé la trajectoire optimale "théorique" $\hat{y}(\tau)$, il est ainsi possible, pour un Δt donné, de déterminer $\tilde{y}[(i+1)\Delta t]$.

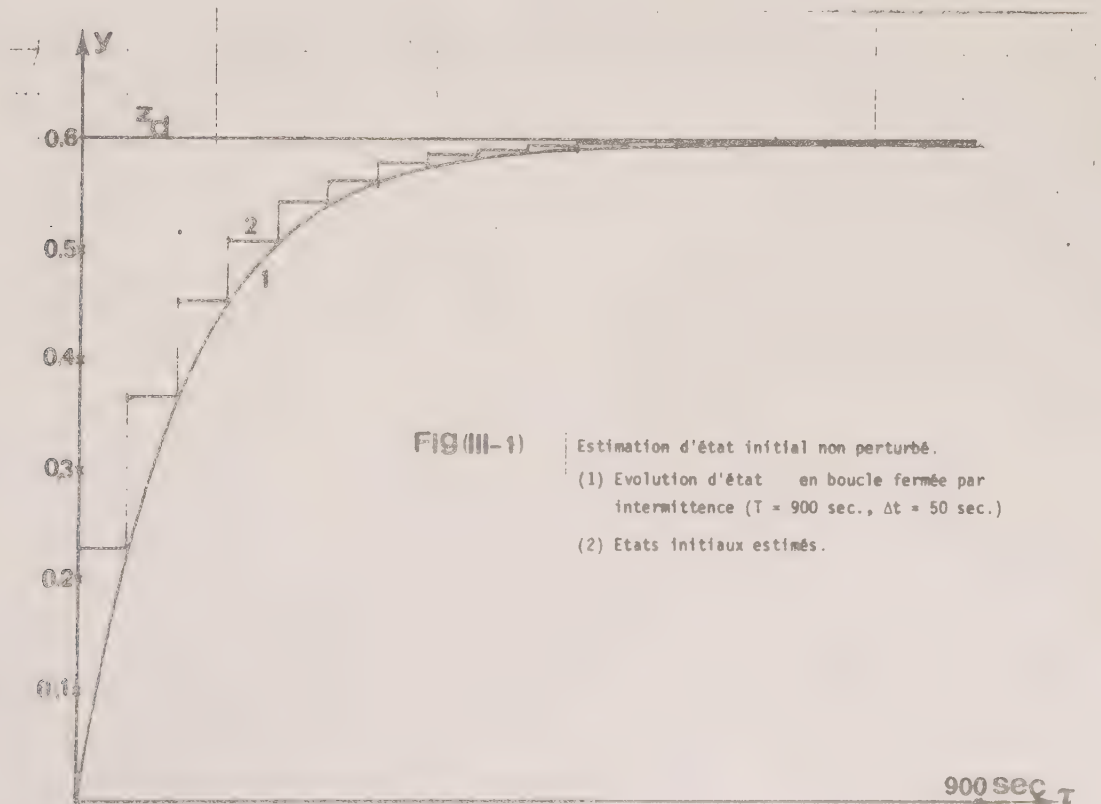
Nous remarquons que :

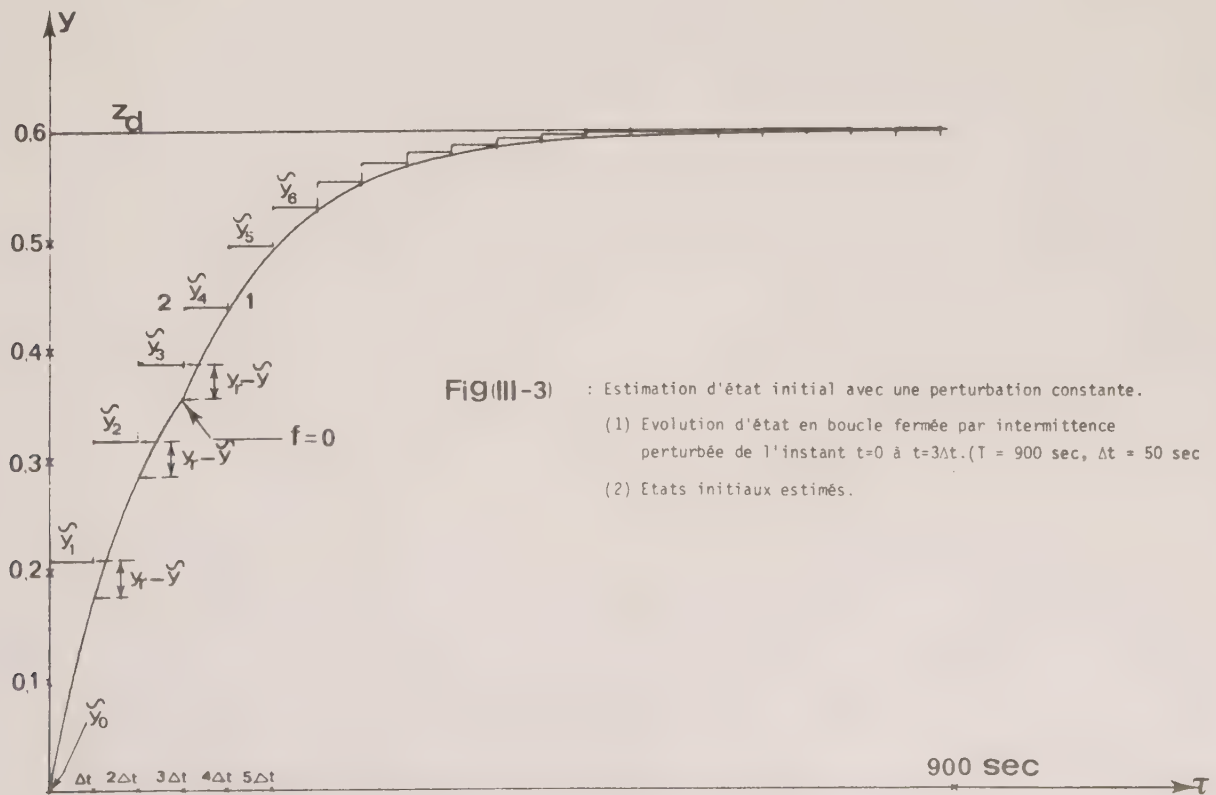
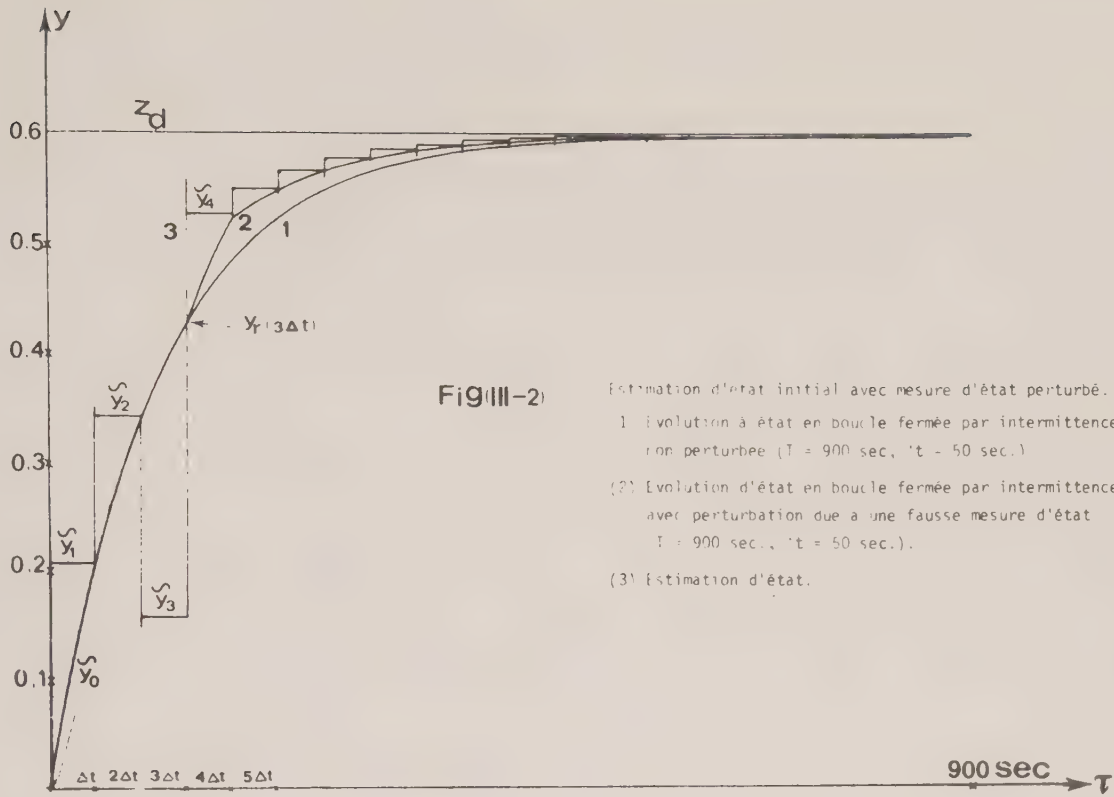
- pour un processus non perturbé l'état estimé est égal à l'état réel. C'est ce que montre la figure (III-1) tracée pour le même exemple qu'en (I-4) avec $\Delta t = 50$ sec.

- d'après l'expression (3-6) l'état estimé $\hat{y}[(i+1)\Delta t]$ est égal à l'état réel si les perturbations cessent d'exister à partir de l'instant $i\Delta t$.

Nous en présentons deux cas illustratifs : le premier, figure(III-2) présente une perturbation affectant la mesure d'état à l'instant Δt ; celle-ci a écarté l'état estimé $\hat{y}(2\Delta t)$ de l'état réel et conduit à une loi de commande faisant évoluer le processus comme le montre la trajectoire (2), où l'on voit que les états suivants estimés $\hat{y}(4\Delta t)$, $\hat{y}(5\Delta t)$ correspondent aux états réels ; la trajectoire (1) est celle du système non perturbé. Le deuxième cas figure(III-3) présente un système perturbé par un signal constant f ajouté à l'entrée jusqu'à l'instant $t = 3\Delta t$, où f devient nul. On remarque que $\hat{y}(4\Delta t)$ correspond à l'état réel.

Il est aisé de vérifier que dans le cas de perturbations constantes f agissant sur le processus, il suffit pour connaître l'état réel à l'instant $(i+1)\Delta t$ d'ajouter à $\hat{y}[(i+1)\Delta t]$ le vecteur $y_r(i\Delta t) - \hat{y}(i\Delta t) = \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} \phi(\sigma, (i+1)\Delta t) \cdot f \cdot d\sigma$, inchangé pour tout i .





III-2. Résolution des équations d'optimalités

Nous nous limitons dans cet aperçu au cas des systèmes linéaires stationnaires avec critère quadratique, classe de système qui contiendra notre application à un processus thermique. Pour le cas général nous renvoyons à [9] , [18] .

Rappelons que pour un système décrit par :

$$(3-8) \quad \frac{dy}{dt} = Ay + Bu \quad , \quad y \in \mathbb{R}^n \quad , \quad u \in \mathbb{R}^m \quad , \quad m < n$$

avec : $y(0) = y_0$

et l'équation de sortie :

$$(3-9) \quad z(t) = Cy(t)$$

et pour un critère quadratique à minimiser tel que :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \left[(z - z_d)^* Q (z - z_d) + (u - u_d)^* R (u - u_d) \right] dt$$

les équations d'optimalité sont données par :

$$(3-10) \quad \begin{aligned} \text{a) } & \frac{dy}{dt} = Ay + Bu \quad , \quad y(0) = y_0 \\ \text{b) } & - \frac{dp}{dt} = C^* Q C y + A^* p - C^* Q z_d, \quad p(T) = 0 \\ \text{c) } & 0 \in R(u - u_d) + B^* p + \partial \psi_{U_{ad}}(u) \end{aligned}$$

Remarquons que l'équation d'état est donnée avec une condition initiale et celle d'état adjoint avec condition finale ; ceci ne permettant pas de résoudre les équations d'optimalité simultanément (sur un calculateur analogique par exemple) on est amené à utiliser un procédé itératif tel que le suivant :

- en se donnant une loi de commande initiale $u(\tau)$ on intègre l'équation d'état pour τ croissant à partir de $\tau = 0$;
- on reporte le résultat $y(\tau)$ dans l'équation d'état adjoint qu'on intègre pour τ décroissant à partir de $\tau = T$;
- en reportant $p(\tau)$ dans l'inéquation (3-10,c), on en tire enfin une nouvelle loi de commande $u(i)$.

On recommence le procédé jusqu'à convergence ; pour ce faire différents algorithmes sont utilisés [17] ; pour des raisons de commodités (simplifications dans la programmation et utilisation d'un minimum de matériel) nous avons opté pour l'algorithme de "relaxation-décentralisation" de type Gauss-Seidel qui se caractérise par les étapes :

- on décompose le système d'équations global (3-10) en plusieurs sous-systèmes de dimension inférieure ;
- on résoud en sous-système selon la procédure décrite plus haut en considérant comme connues les variables relatives aux autres sous-systèmes ;
- on passe ensuite à un autre sous-système en tenant compte des résultats des calculs antérieurs ; la coordination entre les solutions ainsi obtenues pour les sous-systèmes s'effectue de manière itérative.

III.2.1. Décomposition du système d'équations d'optimalité

Nous supposons que l'on peut décomposer le domaine de commande admissible U_{ad} en produit de sous-ensembles convexes fermés U_{ad}^i . On pose alors :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_\alpha \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_\alpha \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_\alpha \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_\alpha \end{bmatrix}$$

où $y_i(\tau)$, $p_i(\tau)$, $u_i(\tau)$ et $z_i(\tau)$ sont les sous-vecteurs d'état, d'état adjoint, de commande et de sortie correspondant au i ème sous-système.

Les matrices $A, B, D = C^*QC$, $W = C^*Q$ et R seront décomposées respectivement en les blocs :

$$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, W_{ij}, \text{ et } R_{ij}$$

avec ces notations le système (3-10) s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{dy_i}{d\tau} &= A_{ii} y_i + B_{ii} u_i + g_i & ; & \quad y_i(0) = y_{i0} \\ \text{b) } \frac{dp_i}{d\tau} &= D_{ij} y_j + A_{ii}^* p_i - W_{ij} z_{jd} + h_i & ; & \quad p_i(T) = 0 \\ \text{c) } 0 &\in R_{ii}(u_i - u_{id}) + B_{ii}^* p_i + k_i + \partial\psi_{U_{ad}}^i(u_i) \end{aligned}$$

$i \in \{1, \dots, \alpha\}$

(3-11)

avec les termes de couplage entre les différents sous-systèmes :

$$\begin{aligned} q_i &= \sum_{j \neq i}^{\alpha} A_{ij} y_j + B_{ij} u_j \\ h_j &= \sum_{i \neq j}^{\alpha} D_{ij} y_j + A_{ij}^* p_j + W_{ij} z_{jd} \\ k_j &= \sum_{i \neq j}^{\alpha} R_{ij}(u_j - u_{jd}) + B_{ij}^* p_j \end{aligned}$$

on a ainsi décomposé le système initial en sous-systèmes analogues au premier, mais de taille réduite.

III.2.2. Interprétation

On interprète le système (3-11) comme les équations d'optimalité d'un sous-problème à une équation d'état (3.11.a) où g_i est une perturbation agissant sur le processus physique représenté par cette équation ; l'équation (3-11-b) et celle d'état adjoint avec h_i comme consigne et intercaction, la troisième équation pouvait (compte-tenu des contraintes locales) être interprétée comme la minimisation d'une fonctionnelle quadratique $J(u_i(.))$, mais généralement elle ne peut pas s'interpréter comme un problème local de commande optimale, car (sauf cas particulier) :

$$J(u) \neq \sum_{i=1}^n J(u_i(.)).$$

III.2.3. Résolution d'un sous-système

En posant $\theta = T - \tau$, le système (3-11) devient :

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{d\tau} &= A_{ii} y_i + B_{ii} u_i + g_i, \quad y_i(0) = y_{i0} \\ (3-12) \quad \frac{dp_i}{d\theta} &= D_{ij} y_i + A_{ii}^* p_i - W_{ii} z_{id} + h_i, \quad p_i(0) = 0 \\ 0 &\in R_{ii}(u_i - u_{id}) + B_{ii}^* p_i + k_i + \partial \psi_{U_{ad}}^i(u_i) \end{aligned}$$

La résolution du sous-système (3-12) peut se déterminer de manière itérative grâce à l'algorithme suivant :

- Soit $u^0(\tau) \in U_{ad}$ donné $\tau \in [0, T]$

1) à la $(r+1)^{\text{ème}}$ itération les variables d'état sont déterminées par :

$$\frac{dy_i^{(r+1)}}{d\tau} = A_{ii} y_i^{(r+1)} + B_{ii} u_i^{(r)} + g_i ; \quad y_i(0) = y_{i0}$$

- 2) $y_i^{(r+1)}$ étant connue, on peut alors résoudre l'équation d'état adjoint :

$$\frac{dp_i^{(r+1)}}{d\theta} = D_{ii} y_i^{(r+1)} + A_{ii}^* p_i^{(r+1)} - W_{ii} z_{id} + h_i ; p_i^{(r+1)}(0) = 0$$

- 3) enfin la variable de commande sera solution de l'inégalité :

$$0 \in R_{ii}(u_i - u_{id}) + B_{ii}^* p_i + k_i + \partial \psi_{U_{ad}}^i(u)$$

On arrête de répéter les étapes (1), (2) et (3) (micro-itération) lorsqu'il y a stabilisation (avec une précision donnée ε_1) entre deux itères successifs. Une fois que ceci est réalisé on passe au sous-système suivant en rapportant dans y_{i+1} , h_{i+1} et k_{i+1} les valeurs de y_s , p_s et u_s obtenues lors de la résolution des sous-systèmes précédemment, $s \in \{1, 2, \dots, i, i+1, \dots, n\}$; on continue ce procédé jusqu'à épuisement des sous-systèmes. On aura ainsi effectué une macro-itération. On arrête les macro-itérations lorsque il y a stabilisation entre deux macro-itération successives avec une précision donnée ε_2 .

III.2.4. Conditions de convergence

Soit la matrice en blocs :

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} -A_{ij} & 0 & -B_{ij} \\ -D_{ij} & -A_{ij}^* & 0 \\ 0 & B_{ij}^* & R_{ij} \end{bmatrix}$$

des conditions suffisantes ont été établies par J.C. MIELLOU et son équipe [16] , [18] , se formalisant par l'existence d'une minorante vectorielle de L qui soit une "M-matrice"

Remarquons que la convergence peut être atteinte sans que cette condition soit remplie ; son intérêt demeure alors dans le fait qu'elle présente une indication de convergence en fonction des paramètres figurant dans la matrice L .

Dans les cas où on n'aboutit pas à la convergence, il existe des artifices favorisant la convergence, tels que la sous-relaxation [18], ou la modification du critère d'optimalité avec un terme fonction de $u^{(r+1)} - u^{(r)}$ (le lagrangien augmente) ; ce terme s'annulant en cas de convergence, on retombe sur le même problème d'optimalité [19].

Remarque :

Pour un problème de commande en boucle fermée par intermittence, réduire l'horizon à une valeur $T=d$ petite, peut présenter l'avantage d'avoir un temps de calcul d'une nouvelle loi de commande permettant une courte période de fermeture de la boucle ; par contre il convient de choisir une matrice de pondération Q plus importante dans le critère (cf. II-4.7) de manière à obtenir une loi de régulation équivalente. Dans ces conditions il est possible, mais non certain, que la convergence se trouve améliorée par la réduction de T .

III.3. Conclusion

1) L'estimation d'état future peut s'envisager par :

- a) Extrapolation d'états réels mesurés, lorsque on a affaire à un processus aux lentes variations ou lorsque on dispose d'un modèle mathématique grossier ;
- b) Sinon, on peut tenir compte des caractéristiques du processus en réalisant une estimation basée sur le modèle et la lecture d'état réel, ce qui donne une estimation identique à la réalité si toute perturbation cesse d'exister.

- 2) Les équations d'optimalité peuvent être résolues par un algorithme de relaxation-décentralisation de type GAUSS-Seidel décomposant le système global en sous-systèmes, résolvant chacun de ces sous-systèmes en lui apportant les résultats déjà acquis au niveau des autres sous-systèmes.

C H A P I T R E I V

MISE EN OEUVRE HYBRIDE DE LA COMMANDE EN BOUCLE FERMEE PAR INTERMITTENCE

Dans ce chapitre, nous essayons de détailler la réalisation des étapes décrites au deuxième chapitre (II-3) à l'aide d'un calculateur hybride ; nous faisons une description rapide du calculateur hybride dont nous nous sommes servi pour notre application décrite au sixième chapitre.

IV-1. Calculateur hybride

Il se compose principalement de :

- 1 - un mini-calculateur numérique
- 2 - un calculateur analogique
- 3 - des éléments d'interface
- 4 - des mémoires tampons

IV.1.1. Calculateur numérique

C'est un mini- calculateur T 2000 de Télémécanique présentant la configuration suivante :

- Mémoire centrale de 12 K mots
- Deux coupleurs d'entrée-sortie admettant chacun :
 - 2 x 19 bits en entrée
 - 2 x 19 bits en sortie

ainsi que des signaux de service permettant notamment de provoquer des appels prioritaires.

- Une entrée pour horloge extérieure (cadenceur). Le "software" comporte essentiellement l'assembleur ASMAT.

IV.1.2. Calculateur analogique

Il comporte les éléments suivants :

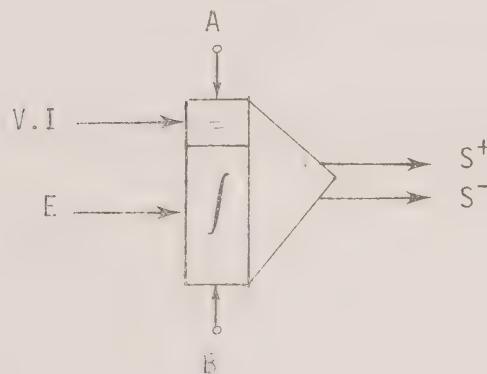
- a - Intégrateur-sommeur
- b - Sommateur changeur de signe
- c - Mémoire analogique
- d - Multiplexeur-démultiplexeur

On trouve aussi d'autres éléments tels que : diviseurs-extracteurs de racines carrées - comparateur analogique ...

Nous avons utilisé le calculateur analogique S.A.M. réalisé entièrement au L.A.B. [16] .

a - Intégrateur-sommeur

Il est l'élément principal du calculateur analogique, que l'on peut schématiser par :



Son fonctionnement est le suivant :

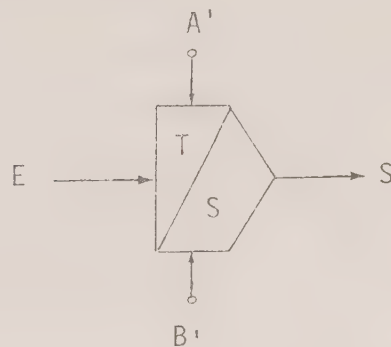
- Acquisition ($A=1, B=0$) : la sortie reproduit le signal d'entrée ;

- Résolution ($A=1, B=1$) : la sortie est proportionnelle à l'intégrale de l'entrée ;
- Mémorisation ($A=0, B=0$) : la sortie maintient sa valeur lors du passage de B à zéro.

Ses principales performances sont :

- précision à 10 KHz en mode acquisition : 0,1 %.
- temps de commutation résolution/mémorisation : 1 μ s. Il peut être câblé de telle sorte que les constantes de temps utilisables sont les suivantes : 1 s, 100 ms, 10 ms et 1 ms.

c - Mémoire analogique



- la sortie suit l'entrée tant que $A' = B' = 0$
- la sortie conserve la valeur de l'entrée lors du passage de A' de zéro à un.

Ses performances, lorsqu'elle est munie d'une capacité de 10 nf, sont les suivantes :

- temps d'acquisition à 0,1 % pour un échelon d'entrée de 10 V : 10 μ sec.
- dérive en mode "mémorisation" : 5 mv/sec. max.
- temps de commutation "suiveur $\rightleftharpoons$ bloqueur" : 50 n sec.

d - Multiplexeur-démultiplexeur

Précision statique : 0,02 %, temps de commutation : 500 ns.

La principale caractéristique du calculateur analogique S.A.M. est sa vitesse de calcul assez élevée pour les éléments linéaires avec une précision de 10^{-3} en module et en phase jusqu'aux environs de 10^4 Hz.

IV.1.3. Éléments d'interface

Ce sont les éléments d'interface entre calculateur numérique et calculateur analogique tels que :

- Convertisseur analogique-numérique (C.A.N) bipolaire à 12 bits en binaire pur ayant un niveau d'entrée compris entre -10 V et +10 V et un temps de conversion de 24 μ s ;
- Convertisseur numérique analogique (C.N.A) bipolaire à 12 bits en binaire pur ayant un temps de conversion moyen de 1 μ s et une sortie basse impédance comprise entre -10 V et +10 V.

IV.1.4. Registres tampons

Pour la commande en boucle fermée par intermittence, on aura besoin de deux registres tampons :

a - Registre tampon de valeurs initiales :

Afin d'éviter au calculateur numérique d'avoir à élaborer et à maintenir à l'entrée V.I. des intégrateurs les valeurs initiales correspondant au sous-système sur lequel on effectue une itération, tâche qui compliquerait la programmation et prolongerait le temps nécessaire au calcul, on a été amené à

stocker toutes les valeurs initiales, sous forme numérique, dans un registre tampon de taille égale à la dimension du système figure (IV-1). Le calculateur numérique en change le contenu toutes les fois qu'on recommence le calcul d'une nouvelle loi de commande ; on a accès à un nombre de mots successifs égal à la dimension du plus grand sous-système ; sa sortie est bouclée à son entrée de manière à retrouver les mêmes valeurs lors de la macro-itération suivante.

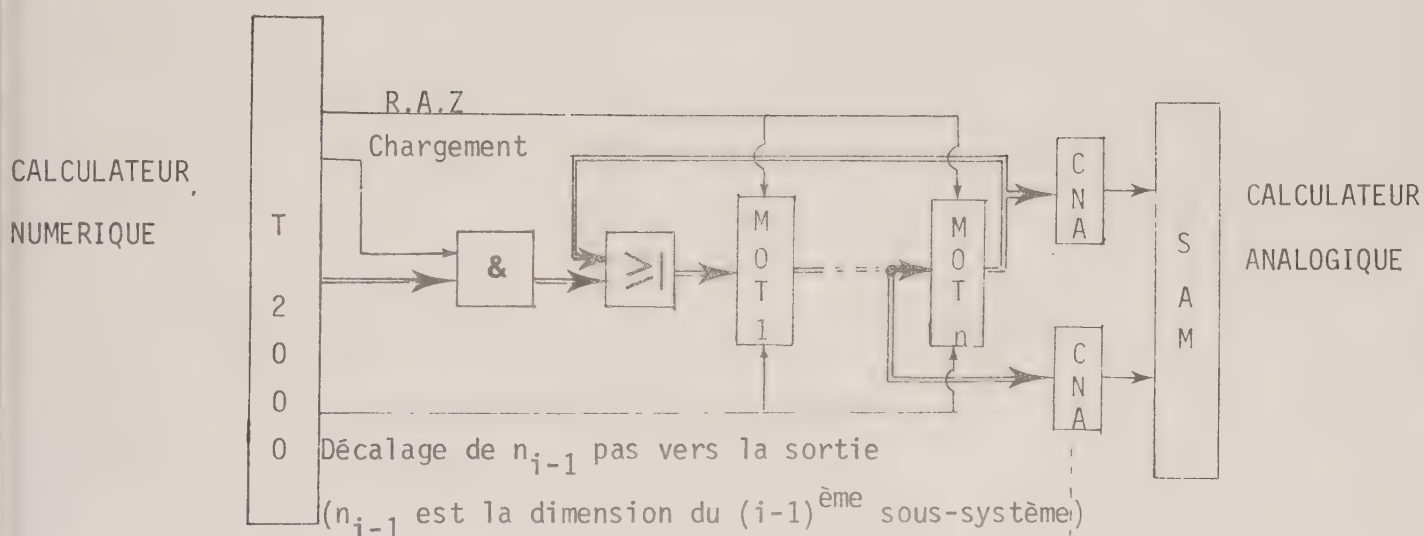


FIGURE (IV-1) : Registre tampon de valeurs initiales

b - Registre tampon de commande

Dans le cas des systèmes multivariables avec $u \in \mathbb{R}^m$ où $m > 1$ il serait coûteux d'avoir un certain nombre de mots de sortie

du calculateur numérique (coupleur universel) réservés à maintenir les valeurs de commande à l'entrée des actionneurs du système. Il est plus simple d'avoir un registre tampon conservant ces valeurs durant l'intervalle de temps compris entre deux appels successifs de fourniture de commande ; il est composé d'un nombre de mémoires égal à m , chaque mémoire correspondant à une composante du vecteur de commande. En ce qui concerne celui qui nous servira [22] , figure (IV-2), la sortie de mémoire suit l'information présente à l'entrée tant que l'horloge est haute, puis reste maintenue jusqu'à ce que l'horloge redevienne haute.

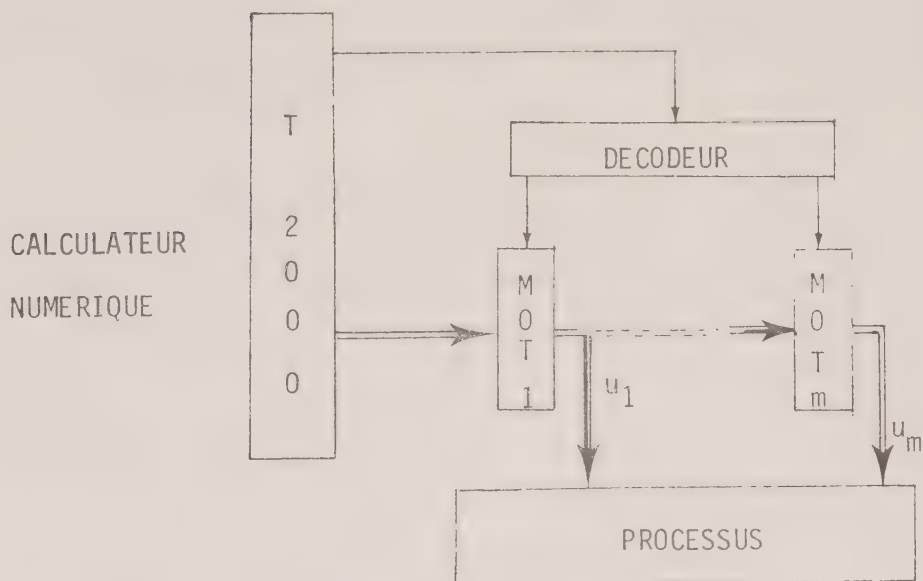


FIGURE IV-2 : Registre tampon de commande

IV-2 - Distribution des tâches entre les éléments de calcul

a - Calculateur numérique

Il aura pour tâche de :

- Commander le calculateur analogique : mise en mode acquisition, résolution ou mémorisation des intégrateurs, mise en mode suiveur ou bloqueur des mémoires analogiques ; commande de l'ensemble des éléments d'interface et des mémoires tampons ;
- Echanger des informations avec le calculateur analogique : transmission et acquisition d'informations en synchronisme avec une horloge H_1 à période ajustable ;
- Effectuer des calculs numériques ;
- Echanger avec le processus : lecteur d'état et fourniture de commande.

b - Calculateur analogique

Son rôle est de résoudre les équations différentielles relatives aux différents sous-systèmes.

c - Registres tampons

Ils collaborent avec le calculateur numérique en ce sens qu'ils maintiennent des informations destinées soit au calculateur analogique "valeurs initiales", soit au processus "commande".

Sur la figure (IV-3) on montre la répartition des tâches entre les différents dispositifs et leur liaison avec le processus. H_3 est l'horloge, engendrée par H_2 , donnant l'ordre à chaque front montant de recommencer un nouveau calcul.

$$(4-a) \quad \frac{dy_i^{(r+1)}}{d\tau} - A_{ii} y_i^{(r+1)} = B_{ii} u_i^{(r)} + g_i, \quad y_i^{(r+1)}(0) = y_{i0}$$

$$(4-b) \quad \frac{dp_i^{(r+1)}}{d\theta} - A_{ii}^* p_i^{(r+1)} + W_{ii} z_{id} = D_{ii} y_i^{(r+1)} + h_i, \quad p_i(0) = 0$$

$$\theta = T - \tau$$

$$(4-c) \quad 0 \in R_{ii} (u_i^{(r+1)} - u_{id}) + B_{ii}^* p_i^{(r+1)} + k_i + \partial \psi_{U_{ad}^i}(u_i)$$

partie analogique

partie numérique

Les premiers membres des équations (4-a) et (4-b) seront câblés sur le calculateur analogique. A l'instant initial du calcul les étapes pour la résolution de (4-a) se succèdent comme suit : (figure (IV-4)).

- Elaboration des valeurs initiales relatives au ième sous-systèmes ;
- Le calculateur analogique passe du mode acquisition au mode résolution ;

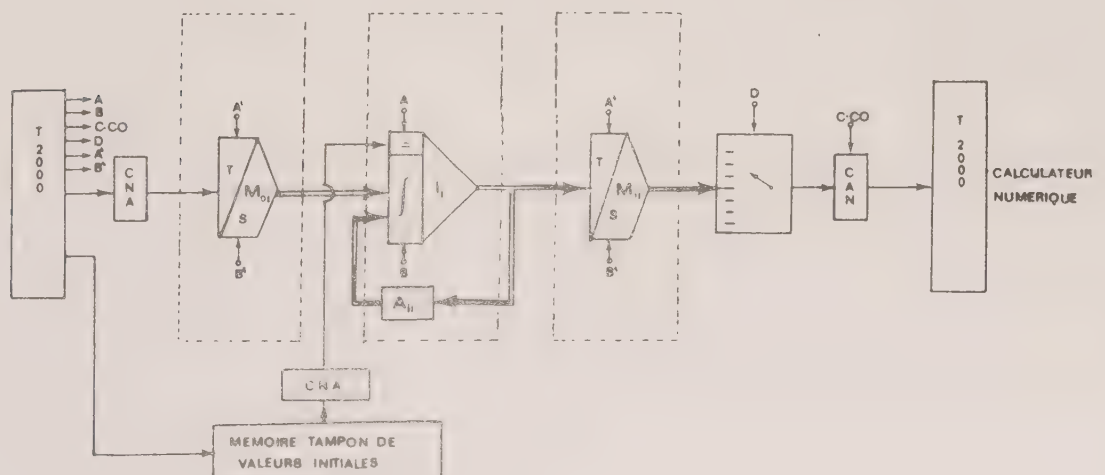


FIGURE (IV-4) : Chaîne d'intégration de l'équation d'état du ième sous-système

- Les mémoires analogiques M_{0i} , M_{1i} sont en mode "suiveur" ;
- Les valeurs $B_{ii} u_i + g_i$ sont envoyées aux différents instants d'échantillonnage ;
- La mémoire analogique M_{0i} passe alors en mode bloqueur ;
- On vient bloquer les mémoires analogiques M_{1i} à chaque instant d'échantillonnage et le vecteur $y_i^{(r+1)}$ est converti, puis rangé dans la mémoire du calculateur numérique ; on calcule alors $D_{ii} y_i^{(r+1)}$ nécessaire pour la résolution de (4-b). La résolution de (4-b) se fait de la même manière mais en sens rétrograde comme nous l'avons déjà mentionné. On résoudra ensuite l'inégalité (4-c) et on en déduira $u_i^{(r+1)}$. Ensuite le calculateur numérique teste l'écart du vecteur

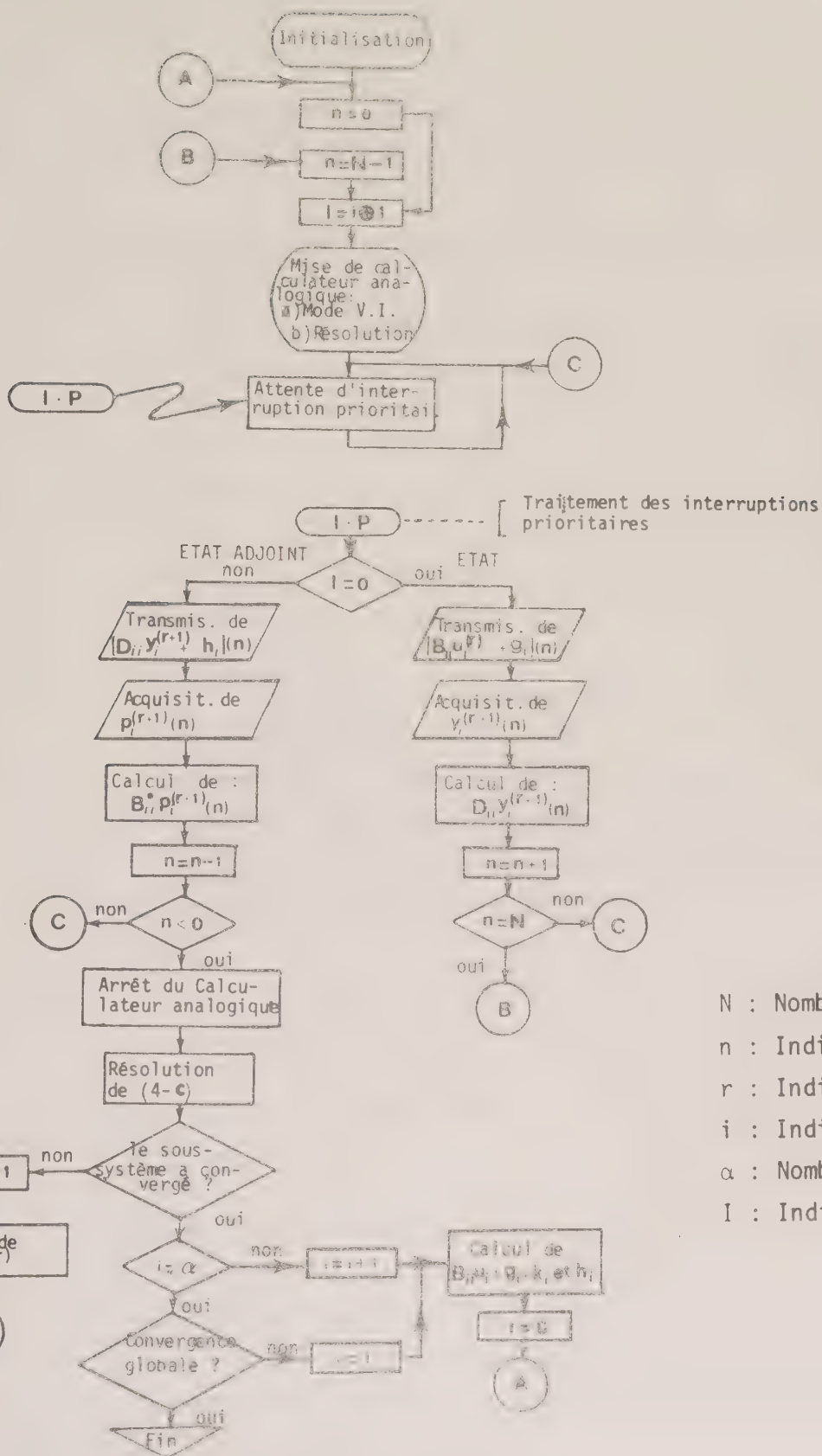
$$[y_i^* \quad p_i^* \quad u_i^*]^*$$

entre les itérés (r+1) et (r) ; en cas de non validité du test on recommence les mêmes étapes pour le même sous-système jusqu'à la convergence. Une fois qu'on a intégré tous les sous-systèmes, on teste l'écart du vecteur $[y^* \quad p^* \quad u^*]^*$ entre les macro-itérés (S) et (S+1). On arrête le procédé lorsqu'il y a convergence, sinon on repart pour une nouvelle macro-itération.

- ORGANIGRAMME

Sur l'organigramme (1), N désigne le nombre d'échantillons, n l'indice de l'échantillon, α le nombre de sous-systèmes ; i désigne le sous-système qu'on est entrain de résoudre, r indique l'itération précédente, I est un indicateur prenant les valeurs zéro ou un, $I = 0$ on intègre l'état, $I = 1$ on intègre l'état adjoint.

L'intérêt que présente la décentralisation du calcul en cas de résolution hybride des équations d'optimalité est la réduction du nombre d'éléments de calcul pour le calculateur analogique et des éléments d'interface.



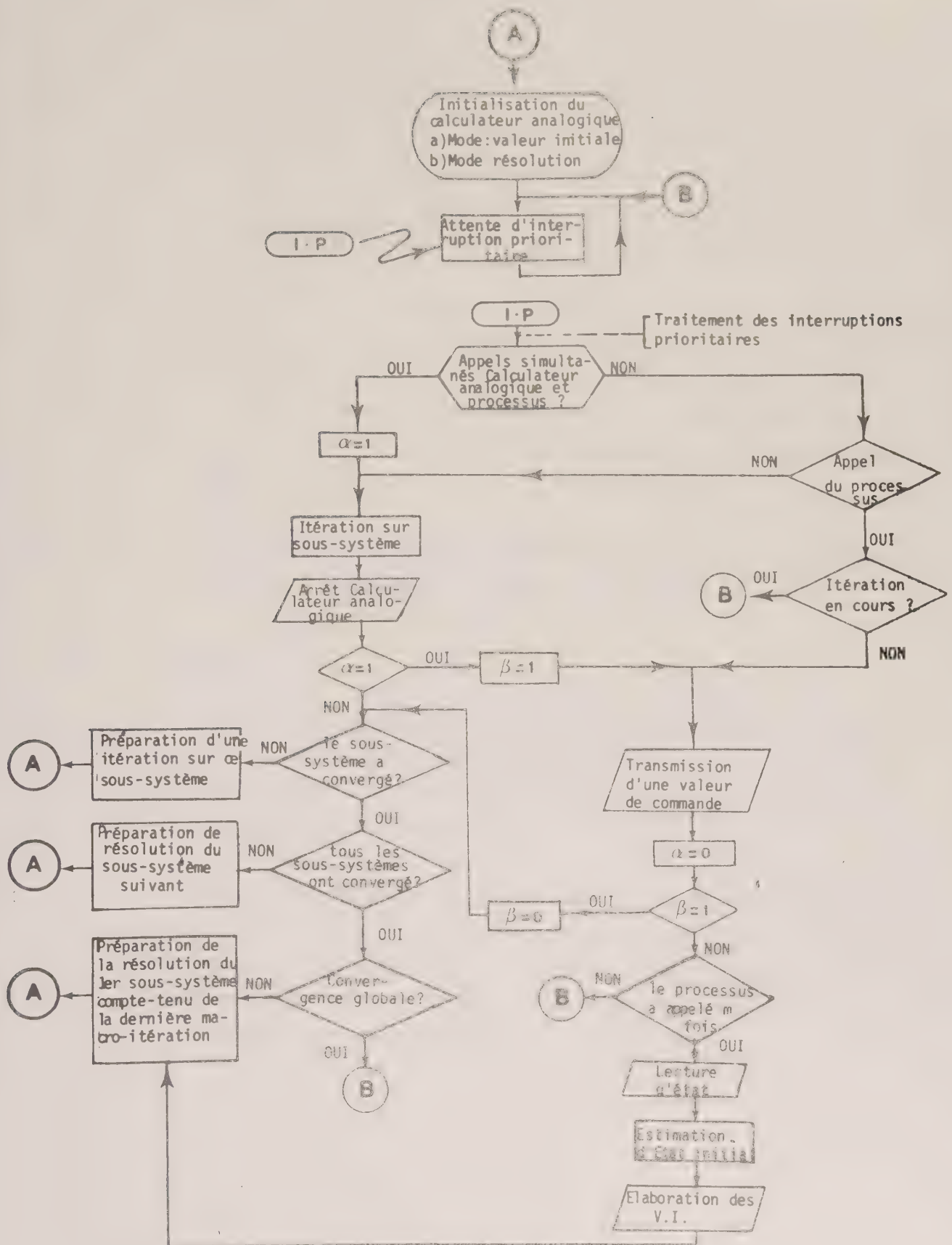
Organigramme (1) de résolution d'équations d'optimalité

Nous allons maintenant détailler une séquence de la procédure de commande en boucle fermée par intermittence.

IV-4. Déroulement d'une séquence (voir organigramme 2)

Soit la i ème séquence de calcul de la loi de commande optimale à appliquer au processus pendant l'intervalle $[i\Delta t, (i+1)\Delta t]$. Ceci se déclenche à partir de l'instant $(i-1)\Delta t$ sur un appel d'interruption prioritaire provoqué par une horloge de période Δt , période qu'on détermine en fonction du temps nécessaire au calcul de la loi $\hat{u}(i\Delta t, \tau)$; dans notre application nous l'avons déduite de l'horloge du processus H_2 de période δ , soit $\Delta t = m\delta$, $m \in \mathbb{N}$. Ainsi une séquence se décrit suivant les étapes :

- 1 - A l'instant $(i-1)\Delta t$ un appel processus se produit ; on fournit alors la commande correspondante à cet instant, qui est stockée dans la mémoire tampon de commande ; ensuite les variables composantes du vecteur d'état sont mesurées, soit $y_r[(i-1)\Delta t]$, et on calcule $\hat{y}(i\Delta t)$ qu'on place aussitôt dans la mémoire tampon des valeurs initiales.
- 2 - On calcule la loi de commande optimale tout en initialisant le procédé (IV-3) par le vecteur $[\hat{y}^* \hat{p}^* \hat{u}^*]^*$ résultant du calcul effectué pendant la séquence précédente ; ceci peut avoir une influence bénéfique sur la rapidité de la convergence.
- 3 - Dans le cas où $m > 1$, ($\Delta t = m\delta$, δ période de H_2), à l'instant $(i-1)\Delta t + \delta$ on reçoit un appel du processus ; on fournit alors la commande correspondante. Il faut envisager le cas où l'appel se produit pendant qu'une itération d'un sous-problème est en cours ; deux manières de réagir sont possibles :
 - a) on annule l'itération et on fournit la commande ;
 - b) on fournit la commande une fois que l'itération en cours est finit.



Organigramme (2) de l'élaboration de commande

Le choix peut se faire suivant les caractéristiques de problème auquel on fait face ; le choix (a) augmenterait le temps nécessaire au calcul de la nouvelle loi de commande, en revanche le deuxième (b) introduit un retard dans la fourniture de la commande, chose qui peut présenter une source de perturbations supplémentaire.

On résoudra ce problème en utilisant deux mémoires tampons montées en série ; la première sera remplie par la valeur de la commande correspondant à l'appel, dans la deuxième il y aura la valeur de la commande suivante ; à chaque appel la première sera chargée par le contenu de la deuxième, le contenu de cette dernière sera renouvelé une fois qu'on aura fini l'itération.

4 - A l'instant $i\Delta t$ la loi de commande $\hat{u}((i-1)\Delta t, \tau)$ est remplacée par $\hat{u}(i\Delta t, \tau)$, et une nouvelle séquence recommence.

IV-5. Conclusion

Disposant de moyens relativement modestes, tels que un mini-calculateur numérique et un calculateur analogique, il est possible d'assurer la résolution des équations d'optimalité dès que les conditions de convergence sont remplies.

D'après les expériences faites sur le calculateur hybride [9] il apparaît que le temps de calcul est nettement inférieur au temps nécessaire au calcul utilisant des moyens purement numériques (en monoprocesseur). Cette performance est très importante pour la commande en boucle fermée par intermittence.

C H A P I T R E V

APPLICATION A UN PROCESSUS THERMIQUE

Nous nous proposons d'appliquer le mode de commande exposé jusqu'ici sur un processus pilote comparable en tout point à un processus industriel, que ce soit en raison du caractère essentiellement approché du modèle mathématique utilisable pour la conduite ou pour l'importance des perturbations auxquelles il est soumis lors de son fonctionnement, ou encore par sa complexité.

Il s'agit du four à moufle "HERCULE" réalisé et étudié au sein du Laboratoire d'Automatique de Besançon par A.W. EL AWANI [22] .

V-1. Description générale

C'est un four à moufle d'une hauteur de 1300 mm, de forme cylindrique de 500 mm de diamètre, au centre duquel est placée une cheminée de diamètre intérieur 85 mm et de 100 mm de diamètre extérieur ; sa hauteur est de 1200 mm, divisée en douze zones de chauffage ; à chacune correspond un boudin de résistance électrique enroulé sur un moufle. Ces éléments chauffants sont noyés dans une couche de ciment réfractaire de façon à former un moufle chauffant homogène de diamètre intérieur de 85 mm et de 155 mm de diamètre extérieur ; le tout est isolé par deux couches, la première de laine de verre, la deuxième de vermiculite. Les deux extrémités sont munies d'anneaux d'amiante , d'épaisseur de 20 mm, isolant ainsi le moufle de l'enveloppe métallique de telle sorte que les pertes calorifiques verticales au sein de l'isolant thermique et aux extrémités de la cheminée soient négligeables.

La pièce chauffée est un barreau cylindrique de 15 mm de diamètre et de même longueur que la cheminée, maintenu verticalement au centre de la cheminée ; le "profil" de température de ce barreau est mesuré au moyen de 12 thermocouples, dont les informations constituent les 12 sorties du processus.

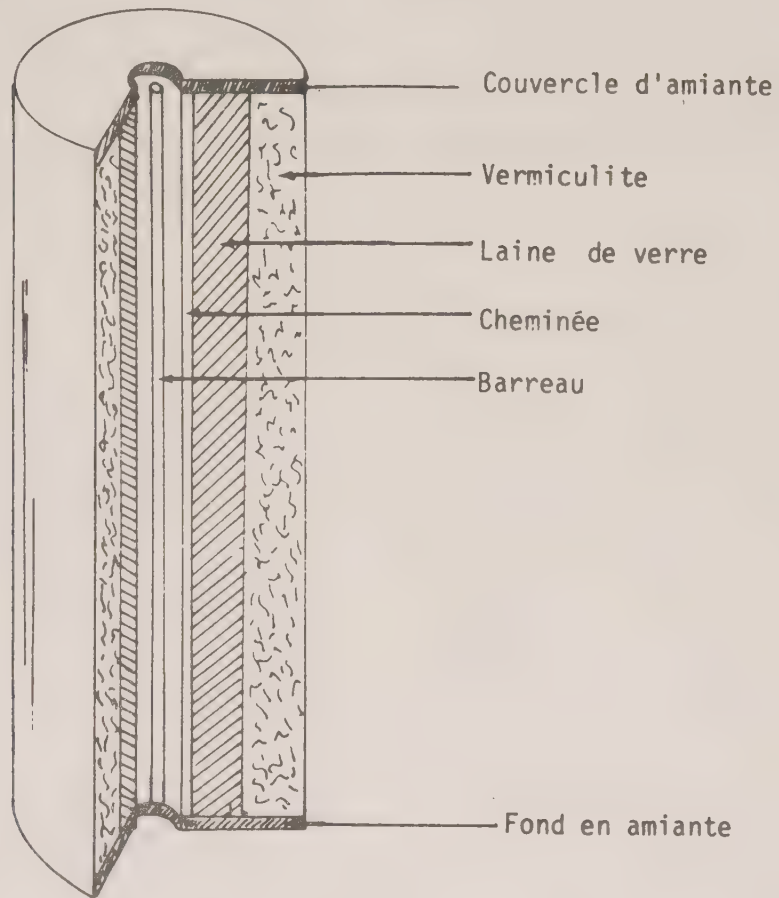


FIGURE (V-1) : Coupe longitudinale du four

V-2. Organes de commande

Chaque organe de commande relatif à une zone de chauffage délivre une puissance proportionnelle à un ordre, fourni sous la forme d'un mot binaire de 10 bits [22, chapitre 2] .

L'ordre affiché à l'entrée de chaque zone est multiplié par un terme correctif, image de la tension du secteur, de sorte que le rapport entre l'ordre et la puissance délivrée reste le même en dépit des fluctuations de tension du secteur, figure (V-2). La prise en compte d'un nouvel ordre se fait toutes les 10, 24 sec, période de l'horloge H_2 , provoquant une interruption prioritaire au niveau du calculateur numérique afin que celui-ci fournisse une nouvelle commande. Celle-ci se matérialise à chaque période d'échantillonnage par l'application de la tension du réseau alternatif à la résistance chauffante, pendant un nombre (entier) de période-secteur égal au nombre qui représente l'ordre corrigé.

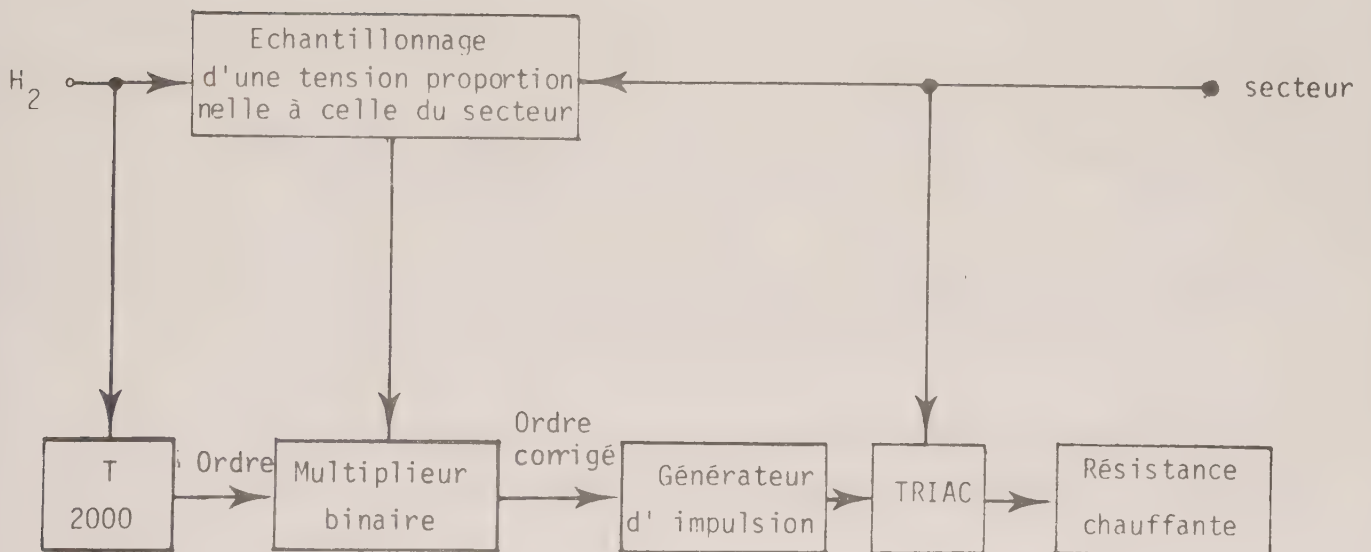


FIGURE (V-2) : Schéma d'un organe de commande du four

V-3. Modélisation

Nous sommes en présence d'un processus possédant une symétrie de révolution dont les échanges thermiques peuvent théoriquement être définis à l'aide d'équations aux dérivées partielles dépendant de deux variables d'espace, l'altitude h et le rayon r et d'une variable temporelle τ .

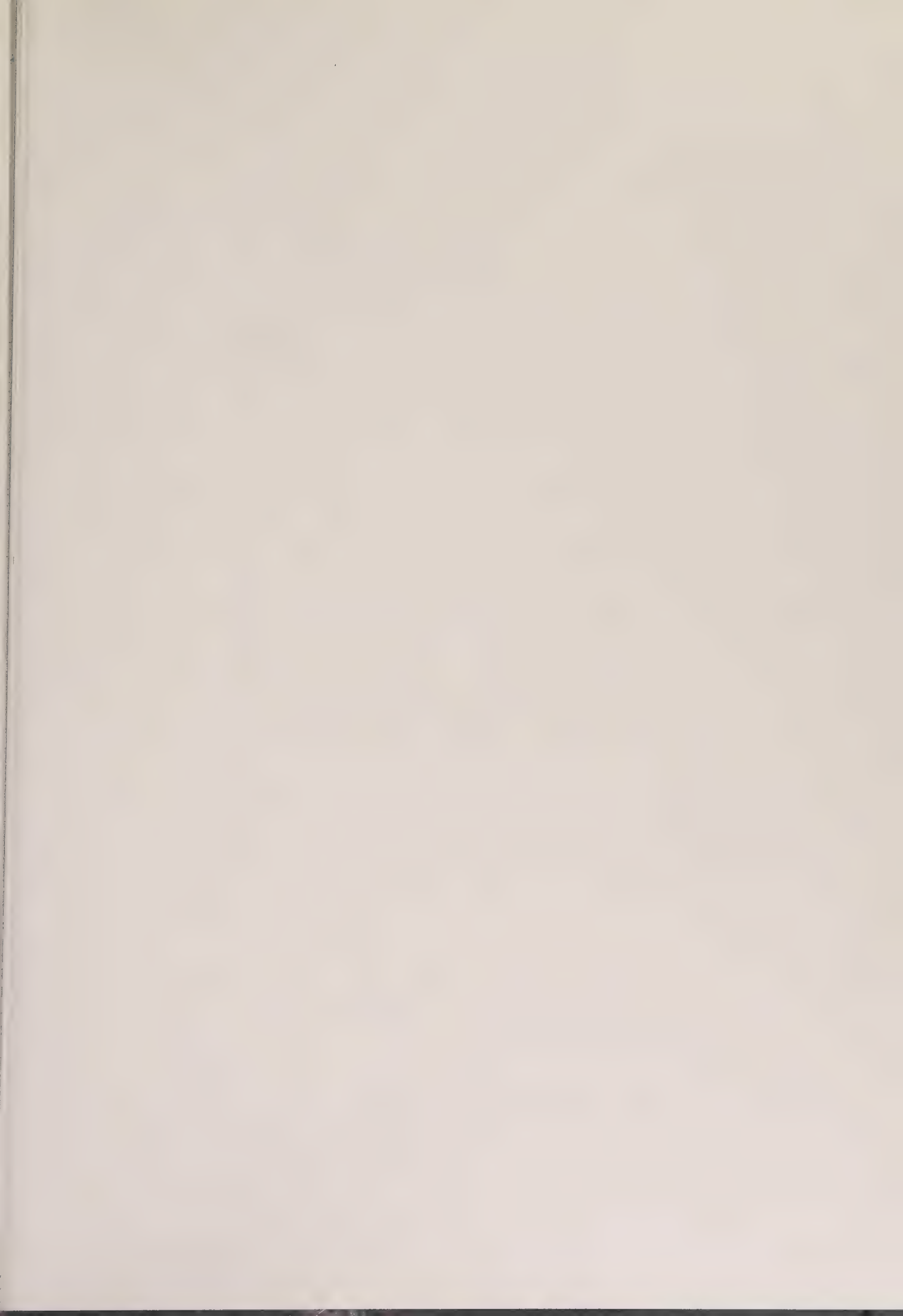
Vu la nature du processus, il est clair que les échanges thermiques entre le four et le barreau se font principalement par rayonnement et par convection naturelle due à l'air circulant librement dans la cheminée ouverte aux deux extrémités.

On cherche essentiellement à décrire convenablement les gradients de température axiaux en s'intéressant à une évolution de température sur une plage réduite.

Afin de simplifier les équations représentant le four, des hypothèses simplificatrices ont été faites conduisant à un modèle plus facilement exploitable telles que :

- H₁) L'écoulement de l'air dans la cheminée est monodimensionnel et en régime quasi-permanent ;
- H₂) L'air est un gaz transparent ;
- H₃) La masse volumique, la chaleur massique et la conductivité thermique des éléments solides sont constants ;
- H₄) La température moyenne du barreau ne dépend que de l'altitude h ; on néglige donc la conduction radiale au sein du barreau ;
- H₅) On linéarise la loi d'échange thermique par rayonnement de Stefan-Boltzman entre le barreau et la cheminée, ce qui ramène cette loi à la forme :
$$\Delta Q = \epsilon \cdot \Delta T$$
- H₆) Autour du point de fonctionnement, on considère que les pertes calorifiques sont négligeables dans l'isolant thermique.

Compte-tenu de ces hypothèses, une étude basée sur les lois de la thermodynamique [22] , [9] a permis d'écrire quatre équations différentielles décrivant les variations thermiques observées sur un volume de contrôle de forme annulaire situé à l'altitude h , caractérisant en particulier l'état thermique du barreau z , et celui de la cheminée x , ainsi que l'état de la paroi intérieure de la cheminée θ , et la température absolue T du milieu entre la paroi de la cheminée et le barreau.



$$B = \begin{vmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & B_{12} \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & C_{12} \end{vmatrix}, \text{ avec } C_1 = C_2 \dots = C_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$$

L'identification du four autour du point de fonctionnement choisi pour l'étude ($350 \pm 10^\circ \text{C}$ pour les différentes zones de la cheminée, de 200 ± 10 à 250 ± 10 pour les différents segments du barreau) a donné :

$$D_1 = 10^{-4} \begin{vmatrix} -63 & 36 \\ 1,13 & -10,4 \end{vmatrix}, D_1 = D_2 = \dots = D_{11} = 10^{-4} \begin{vmatrix} -65 & 38 \\ 1,13 & -11,36 \end{vmatrix}$$

$$D_{12} = 10^{-4} \begin{vmatrix} -73 & 41,5 \\ 1,13 & -9,3 \end{vmatrix}, T = 10^{-4} \begin{vmatrix} 10,85 & 0,0 \\ 0,0 & 0,52 \end{vmatrix}, S = 10^{-4} \begin{vmatrix} 0,95 & 2 \\ 0,055 & 0,13 \end{vmatrix}$$

$$E = 0,65$$

$$B_1 = 10^{-2} \begin{vmatrix} 0 \\ 0,56 \end{vmatrix}, \quad B_2 = B_3 - B_4 = 10^{-2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1,08 \end{vmatrix}$$

$$B_4 = B_5 = \dots = B_{10} = 10^{-2} \begin{vmatrix} 0 \\ 0,96 \end{vmatrix}, \quad B_{11} = 10^{-2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1,08 \end{vmatrix}, \quad B_{12} = 10^{-2} \begin{vmatrix} 0 \\ 0,36 \end{vmatrix}$$

V-4. Capteurs d'état

Les soudures chaudes de douze thermocouples sont encastrées sur le barreau et délivrant une tension proportionnelle à la température autour des douze points concernés ; de même douze capteurs introduits à cet effet lors de la construction du four permettent d'observer l'état de la cheminée, les soudures chaudes y sont en contact avec les résistances de chauffage.

Etant donné que les variations de tension aux bornes des thermocouples en fonction des variations de température reste faible, il a été nécessaire de procéder à une amplification, suivie d'un système passe-bas jouant le rôle d'un filtre ; l'état du barreau et celui de la cheminée seront lus par le calculateur hybride à intervalle Δt et en balayant les différentes zones comme le montre la figure (V-3).

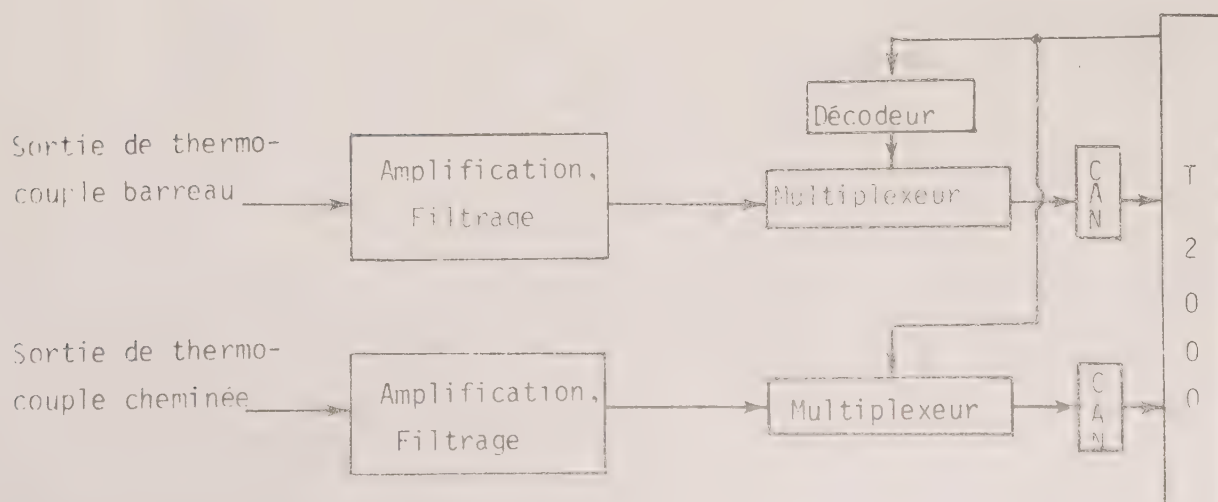


FIGURE (V-3) : Lecture d'état

V-5. Problème de la commande du processus

- But de sa commande

C'est d'obtenir une répartition de température prescrite sur douze points du barreau situés au centre de douze zones de chauffage, qu'on note z_d .

La loi de commande devant être appliquée afin d'atteindre ce but peut être celle obtenue en minimisant le critère :

$$(5-3) \quad J = \frac{1}{2} \int_0^T [(z-z_d)^* Q(z-z_d) + \lambda (u-u_d)^* R(u-u_d)] d\tau$$

où $\lambda = \frac{||z_d||^2}{||u_d||^2}$ est un scalaire permettant l'interprétation

des matrices Q et R comme matrice de pondération de précision et de commande.

- Equation d'optimalité

$$a) \quad \frac{dy}{d\tau} = Ay + Bu \quad ; \quad y(0) = 0$$

$$(5-4) \quad b) \quad - \frac{dp}{d\tau} = C^* QCy + A^* p - C^* Qz_d \quad , \quad p(T) = 0$$

$$c) \quad 0 \in \lambda R(u-u_d) + B^* p + \partial \psi_{U_{ad}}(\hat{u})$$

où $\psi_{U_{ad}}$ est la fonction indicatrice du domaine convexe U_{ad} des commandes admissible et $\partial \psi_{U_{ad}}$ le sous-différentiel correspondant. Nous sommes en présence de contraintes inégalités :

$$m_i < u_i < M_i \quad , \quad i \in \{1, 2, \dots, 12\}$$

par conséquent la loi de commande s'obtient, au cas où les contraintes ne sont pas saturées à partir de l'équation :

$$0 = \lambda R(u-u_d) + B^* p$$

sinon, elle est déterminée par les relations

$$\begin{aligned} u_i(\tau) &= m_i & \text{si} & \quad u_{id} - \frac{R^{-1}}{\lambda} B_{ii} p_i < m_i \\ u_i(\tau) &= M_i & \text{si} & \quad u_{id} - \frac{R^{-1}}{\lambda} B_{ii} p_i > M_i \end{aligned}$$

V-6. Conclusion

Le processus thermique que nous venons de présenter est un système multivariable, représenté par un modèle mathématique approché dont les coefficients ont été identifiés dans des conditions qui ne sont pas parfaitement reproductible. Il est soumis à des perturbations extérieures tel que le changement quasi-permanent de la température ambiante : une variation de un degré de cette température conduit à une variation de l'ordre de 10 à 15 degrés au niveau du barreau.

Citons comme démonstration à ces faits l'application (restreinte aux trois tranches de bas) de la loi de commande optimale au sens de critère (5-3) avec : $z_d = 30^\circ \text{C}$, $T = 3h$, $Q = \frac{1}{5} I$, $R = I$, figure (V-4) ; on observe un écart important entre l'évolution théorique en boucle ouverte (courbe 1) et l'évolution réelle (courbe 2) relatives au barreau de la dixième tranche, ainsi que les courbes (3) et (4) relatives au barreau de la douzième tranche.

Nous sommes donc en présence d'un système représentant un "bon" sujet de vérification de l'efficacité de la commande en boucle fermée par intermittence objet du chapitre suivant.

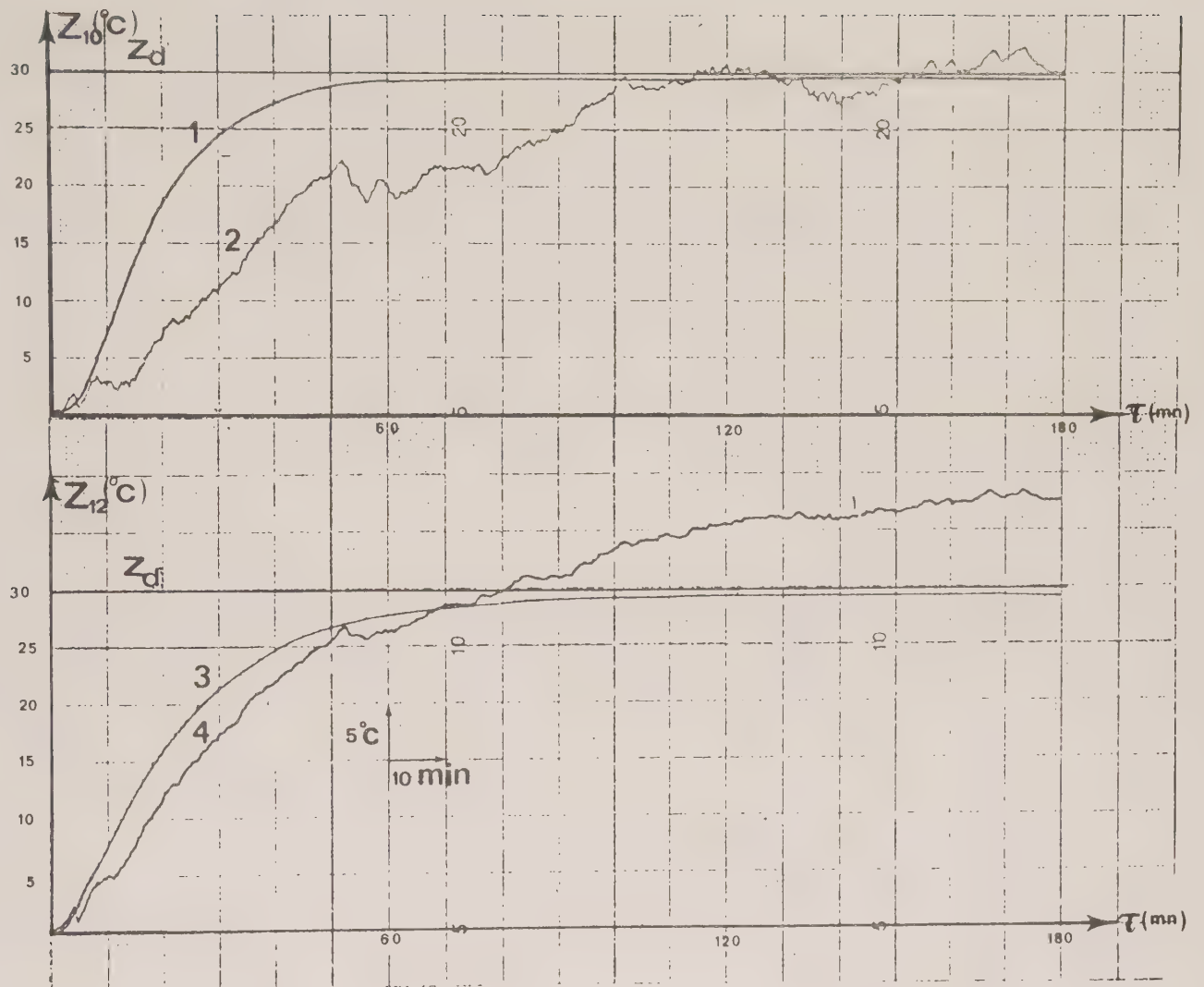


FIGURE (V-4) : Evolution théorique et réelle du barreau

(1,3) Evolution théorique du barreau de 10ème et 12ème tranches

(2,4) Evolution réelle en boucle ouverte de mêmes boucles

Horizon = 3 h, $Q = I/5$, $R = I$, $z_d = 30^{\circ}\text{C}$.

C H A P I T R E VI

EXPERIENCES ET RESULTATS

Nous présentons dans ce chapitre les résultats des premières expériences de commande optimale en boucle fermée par intermittence effectuées sur les trois tranches inférieures du four.

VI-1. Calcul de la loi de commande

Le système d'équations décrivant l'évolution des trois tranches du bas a la même forme que (5-1) avec :

$$A = \begin{vmatrix} D_{10} & T+S & ES \\ T & D_{11} & T+S \\ 0 & T & D_{12} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} B_{10} & & \\ & B_{11} & 0 \\ 0 & & B_{12} \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} C_{10} & & 0 \\ & C_{11} & \\ 0 & & C_{12} \end{vmatrix}$$

où les matrices D_{10} , D_{11} , D_{12} , T , S , E , B_{10} , B_{11} , B_{12} , C_{10} , C_{11} et C_{12} sont données au cinquième chapitre (V-3).

Le critère d'optimalité que nous avons adopté a la même forme que celui de (5-3) avec les spécifications suivantes :

- 1 - L'état désiré auquel nous voulons amener la partie inférieure du barreau est de 30°C au-delà du point de fonctionnement ; la commande nominale se calcule en résolvant l'équation :

$$0 = z_d + (CA^{-1}B) u_d$$

soit :

$$u_{10d} = 3,954 \text{ Cal/sec}$$

$$u_{11d} = 2,482 \text{ Cal/sec}$$

$$u_{12d} = 10,256 \text{ Cal/sec}$$

ce qui nous permet d'exprimer la valeur du coefficient λ :

$$\lambda = \frac{||z_d||^2}{||u_d||^2} = 21,3$$

- 2 - La matrice de pondération de la précision Q est de la forme :

$$Q = \alpha I, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

- 3 - La matrice de pondération de la commande est de la forme :

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & r_2 & 0 \\ 0 & & r_3 \end{bmatrix}$$

- 4 - L'horizon T a été choisi de telle sorte que pour α et R donnés, la convergence du calcul de la loi de commande soit relativement rapidement atteinte.

Nous appliquons au four, durant l'intervalle $[n \Delta t, (n+1) \Delta t]$ le début de la loi de commande $\hat{u}(\tau)$ minimisant le critère :

$$(6-1) \quad J = \frac{1}{2} \int_{n\Delta t}^{n\Delta t+T} \left[\alpha ||z - z_d||^2 + 21,3 (u - u_d)^0 R (u - u_d) \right] d\tau ;$$

Les équations d'optimalité sont celles données en (5-4) avec les conditions :

$$y(n \Delta t) = \tilde{y}(n \Delta t) \text{ et } p(n \Delta t + T) = 0 .$$

Dans un premier temps nous avons considéré, lors de la résolution des équations d'optimalité, qu'on avait affaire à un problème de commande optimale sans contrainte ; on peut donc écrire (5-4-c) sous la forme :

$$(6-2) \quad 0 = 21,3 R (u - u_d) + B^* p \quad ;$$

d'où, en éliminant u :

$$(6-3) \quad \frac{dy}{d\tau} = Ay - M p + Bu_d \quad , \quad y(n \Delta t) = \tilde{y}(n \Delta t)$$

$$- \frac{dp}{d\tau} = \alpha C^* C y + A^* p - \alpha C^* z_d \quad , \quad p(n \Delta t + T) = 0$$

$$\text{où } M = \frac{BR^{-1}B^*}{21,3}$$

En ce qui concerne le calcul effectif, nous appliquons un algorithme de relaxation de type Gauss-Seidel sur le système (6-3) et dès que la convergence est obtenue, la loi de commande optimale $\hat{u}(\tau)$ s'obtient par :

$$(6-4) \quad \hat{u} = u_d - \frac{R^{-1}}{21,3} B^* \hat{p} .$$

VI.1.1. Décomposition

Nous avons choisi une décomposition du système global en trois sous-systèmes, chacun étant alors du deuxième ordre. Vu la forme des matrices B , C et R où pour tout $j \neq i$, on a $C_{ij} = M_{ij} = 0$, les sous-systèmes sont décrits par les équations :

$$\begin{aligned}
 & \frac{dy_i}{d\tau} = A_{ii} y_i - M_{ii} p_i + B_{ii} u_d + \sum_{i \neq j} A_{ij} y_j, \quad y_i(n\Delta t) = \tilde{y}_i(n\Delta t) \\
 & - \frac{dp_i}{dt} = \alpha(C^*C)_{ii} y_i + A_{ii}^* p_i - \alpha C_{ii}^* z_{id} + \sum_{i \neq j} A_{ij}^* p_j, \quad p_i(n\Delta t + T) = 0
 \end{aligned}$$

6-5) $i \in \{10, 11, 12\}$

VI.1.2. Mise en oeuvre des moyens de calcul hybride

a) Partie numérique

Nous avons rédigé un programme au langage assembleur occupant, compte tenu des tables de travail, 5,5 K Mots environ avec la possibilité de prendre 100 points par variable. Il comporte des sous-programmes exécutant les tâches suivantes :

- gestion des appels d'interruption prioritaire ;
- initialisation des tables de travail, introduction des paramètres tels que les nombre d'échantillons, la dimension du système global, celle du sous-système, ...
- résolution des équations d'optimalité, avec la collaboration du calculateur analogique. En fait le rôle principal du calculateur numérique est de mémoriser les trajectoires d'état et d'état adjoint et d'élaborer puis fournir les termes d'interaction

$$\left(\sum_{i \neq j} A_{ij} y_i = g_i \quad \text{et} \quad \sum_{i \neq j} A_{ij}^* p_j = h_i \right)$$

- réalisation des tests de convergence et pilotage du calculateur analogique ;
- lecture d'état, estimation d'état, gestion du registre des valeurs d'état initial ;
- interpolation (éventuelle) et fourniture de la commande ;

b) Partie analogique

Les sous-systèmes à traiter étant tous du deuxième ordre, la résolution d'un sous-système nécessite l'utilisation de quatre intégrateurs ; au total nous avons besoin de douze intégrateurs, nombre réductible à deux en cas de système de câblage automatique.

Notons que les convertisseurs "numérique-analogique" maintiennent leur sortie tant que l'entrée numérique est inchangée ; donc le nombre de mémoires analogiques peut être réduit à deux en réalisant un multiplexage permettant de connecter uniquement le sous-système à résoudre au calculateur T 2000 (voir schéma de câblage). Nous avons à câbler sur le calculateur analogique les équations :

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{d\tau} &= A_{ii} y_i + B_i u_{id} + g_i, & y_i(n\Delta t) &= \tilde{y}_i(n\Delta t) \\ i \in \{10, 11, 12\} \\ \frac{dp_i}{d\theta} &= A_{ii}^* p_i - \alpha C_{ii}^* z_{id} + h_i, & p_i(0) &= 0 \end{aligned}$$

où les signaux d'interactions g_i et h_i sont fournis par des C.N.A. Afin de rendre la câblage possible nous avons dû effectuer un calibrage des variables donnant des variables machines telles que :

$$\begin{aligned} Y_i &= \frac{y_i}{100} \\ i \in \{10, 11, 12\} \\ P_i &= \frac{p_i}{15000} \end{aligned}$$

D'autre part, le calcul devant s'effectuer en temps accéléré, l'utilisation des intégrateurs avec une constante de temps de 10 ms, permet une réduction de la variable temps dans un rapport de 6000, ce qui ramène l'horizon de calcul à :

$$\tau = \frac{T}{6 \cdot 10^3}$$

En définitive le système (6-3) devient :

$$\frac{dY}{d\sigma} = \tilde{A}Y - \tilde{M}P + \tilde{B}u_d$$

$$-\frac{dP}{d\sigma} = (\tilde{C}^*C)Y - \tilde{A}^*P - \tilde{C}^*Z_d$$

où les matrices $\tilde{A}$, $\tilde{M}$, $(\tilde{C}^*C)$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ sont données par :

$$\tilde{A} = \begin{array}{c|cc|cc|cc} & -0,39 & 0,228 & 0,0708 & 0,012 & 0,0036 & 0,0081 \\ & 0,00682 & -0,0682 & 0,00033 & 0,0039 & 0,00022 & 0,000502 \\ \hline & 0,0651 & 0,0 & -0,39 & 0,228 & 0,0708 & 0,012 \\ & 0 & 0,00314 & 0,00682 & -0,0682 & 0,00033 & 0,0039 \\ \hline & 0 & 0 & 0,0651 & 0,0 & -0,44 & 0,249 \\ & 0 & 0 & 0,0 & 0,00314 & 0,00682 & -0,056 \end{array}$$

$$\tilde{M} = \begin{array}{c|cc|cc|cc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \frac{0,0379}{r_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{0,0483}{r_2} & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{0,00549}{r_3} \end{array}$$

$$(\tilde{C}^*C) = \begin{array}{c|cc|cc|cc} & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\tilde{B} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0,00564 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0,00642 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0,00216 \\ \hline \end{array}, \quad \tilde{C} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0,4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0,4 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

- Schéma de câblage :

Les équations d'état ou d'état adjoint relatives à un sous système sont câblées comme le montre le schéma ci-dessous.

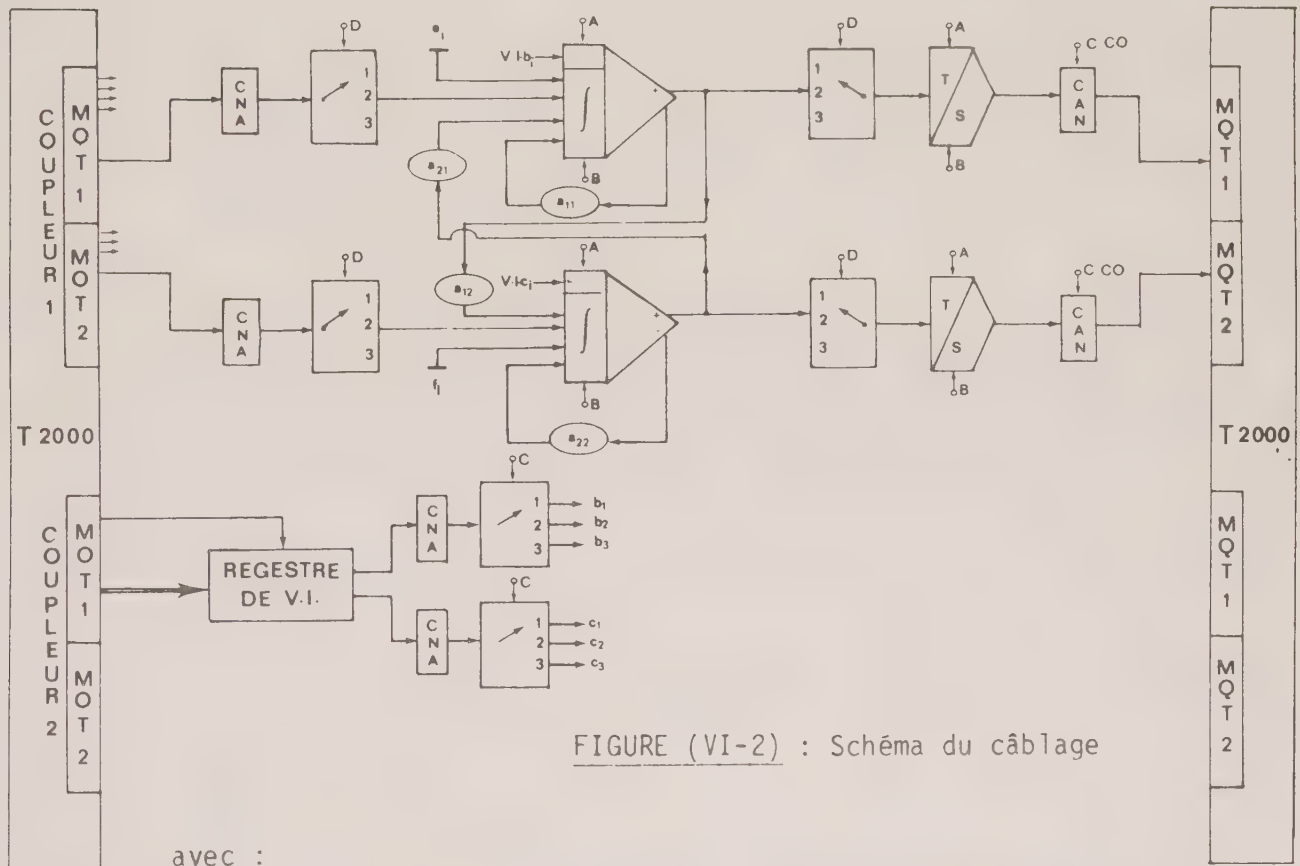


FIGURE (VI-2) : Schéma du câblage

avec :

		a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	e	f
1er sous-système	ETAT	-0,39	0,228	0,0068	-0,068	0	0,02246
	ETAT ADJOINT	-0,39	0,0068	0,228	-0,068	-0,12	0
2ème sous-système	ETAT	-0,39	0,228	0,068	-0,068	0	0,01607
	ETAT ADJOINT	-0,39	0,0068	0,228	-0,068	-0,12	0
3ème sous-système	ETAT	-0,44	0,249	0,0068	-0,056	0	0,02227
	ETAT ADJOINT	-0,44	0,0068	0,249	-0,056	-0,12	0

VI.1.3. Conditions de convergence du calcul

En nous référant à (III.2.4.), la condition suffisante pour la convergence des algorithmes associés au système global et aux sous-systèmes peut être remplie pour les valeurs suivantes de α avec $R = I$.

- 1er sous-système , $\alpha > 1/17$
- 2ème sous-système , $\alpha > 1/21,6$
- 3ème sous-système , $\alpha > 1/7,4$

pour le problème global, il n'est pas aisé de déterminer s'il existe des valeurs de α vérifiant cette condition, nous nous sommes bornés à essayer des valeurs données à l'avance de α , nous avons pris des valeurs comprises entre 1 et 1/50 sans aboutir à un résultat affirmatif.

Bien que cette condition de convergence soit suffisante et non nécessaire, dans la pratique on ne peut atteindre la convergence que pour une pondération donnant un poids fort à l'écart de commande, ce qui implique deux conséquences gênantes :

a - faible réaction vis-à-vis des perturbations

b - sensibilité de la commande optimale $\hat{u}$ à la valeur de u_d dont la connaissance n'est qu'approchée.

Ainsi pour un horizon $T = 3$ h et une matrice $R = I$, nous avons dû choisir $\alpha = \frac{1}{5}$ pour que l'algorithme de relaxation soit convergent.

Nous avons donc étudié la loi de commande optimale relative à différents horizons ; les tracés correspondants sont donnés à la figure (VI-2) en ce qui concerne la zone de chauffage inférieure. On constate d'une manière générale que la convergence ne peut être atteinte, pour un α donné, que si on diminue la durée de l'horizon.

On observe en effet que pour $T = 3 \text{ h}$, la commande optimale $\hat{u}$ et u_d devient notable à partir d'un horizon de 7,5 mn, qui autorise un poids $\alpha = 25$, d'où un gain appréciable de la boucle de régulation à horizon glissant associée.

Nous remarquons toutefois que la décroissance de l'horizon T n'est pas une fonction linéaire de α , comme le montre le tableau suivant :

T	3 h	1 h	30 mn	15 mn	7,5 mn
α	1/5	1/2	3/2	5	25

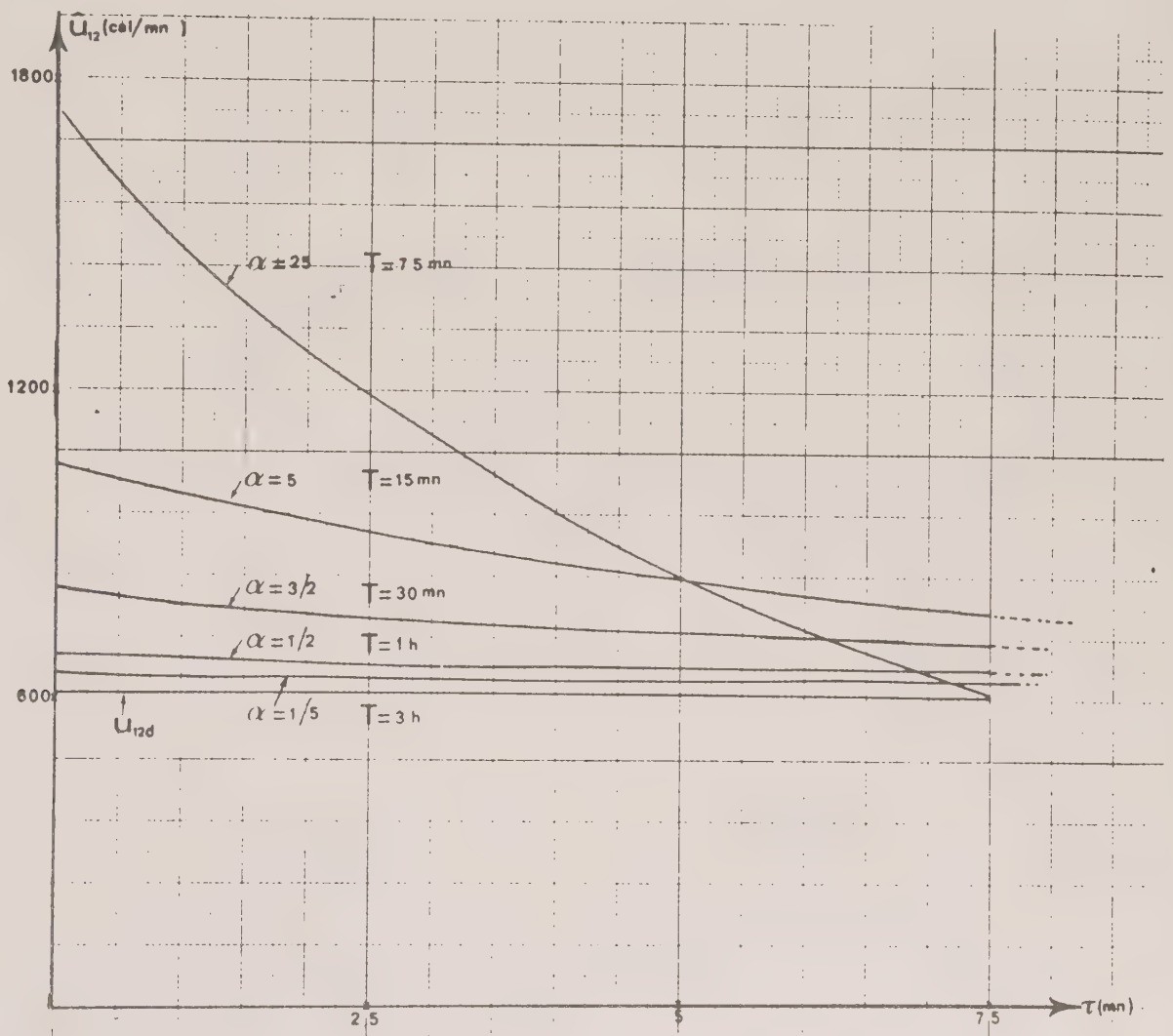


FIGURE (VI-2) : Lois de commande optimale en fonction de l'horizon T et le poids de l'écart de sortie α

VI-2. Mise en oeuvre de la commande en boucle fermée par intermittence

VI.2.1. Choix des matrices de pondération

Dans toutes les expériences que nous avons effectuées, nous déterminons le poids de la précision dans le critère d'optimalité en fixant R et en agissant sur α . Pour le choix de la matrice R, nous faisons les remarques suivantes :

1 - La tranche du bas est celle qui est la plus exposée aux perturbations extérieures ; il faut donc la munir d'une loi de commande pouvant réagir vivement contre les perturbations.

2 - Les valeurs niminales des différentes commandes sont très différentes :

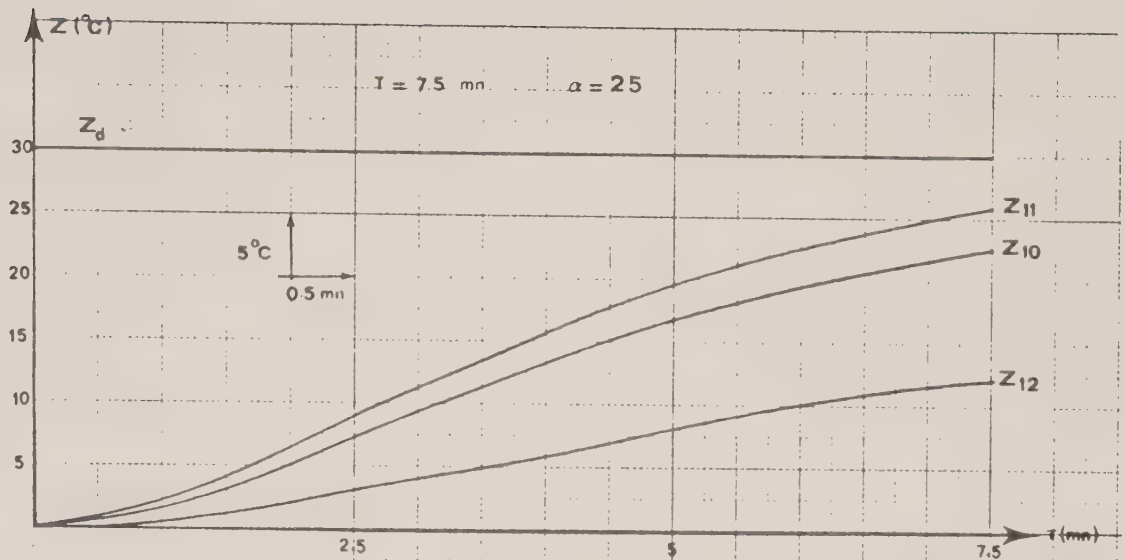
$$\frac{u_{10d}}{u_{12d}} \approx 1/3 \quad , \quad \frac{u_{11d}}{u_{12d}} \approx 1/4 \quad ;$$

3 - Si l'on affectait à $|u_i - u_{id}|$, pour les différentes tranches, le même poids dans la détermination de $\hat{u}_i$ on obtiendrait un temps de réponse excessif pour la tranche inférieure comme le montre la figure (VI-3) :

$$|z_{12d} - z_{12}(\tau)| \gg |z_{10d} - z_{10}(\tau)| \approx |z_{11d} - z_{11}(\tau)|$$

Nous avons choisi une matrice de pondération de la commande R de telle sorte que $z_{12}(\tau)$ soit du même ordre de grandeur que $z_{11}(\tau)$ et $z_{10}(\tau)$. Nous avons utilisé pour toutes les expériences effectuées par la suite une matrice R telle que :

$$R = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 0 \\ & & & 1/8 \end{vmatrix}$$



Evolution de l'état du barreau pour un horizon $T = 7,5 \text{ min}$,
 $\alpha = 25$ et $R = I$

VI.2.2. Estimation d'état initial

Le four étant maintenu à une température égale à son point de fonctionnement, un appel d'interruption prioritaire en provenance de la télétype déclenche l'exécution de deux opérations par le calculateur :

- Initialisation des tables de travail
- Lecture de l'état du four et mémorisation de celui-ci.

Comme on a pu le constater au cinquième chapitre, le modèle mathématique qu'on possède du four est manifestement grossier ; ceci ne nous incite pas à réaliser une estimation d'état basée sur le modèle ; d'autre part, étant donné que la période de

fermeture de la boucle est constamment égale à 10,14 sec, et que la "constante temps" du four est relativement grande, (de l'ordre de 20 mn), nous avons choisi une estimation simple correspondant à une extrapolation d'ordre zéro :

$$\tilde{y} \left[(n+1) \Delta t \right] = y_r(n\Delta t)$$

VI.2.3. Enchaînement de la procédure

Un deuxième appel de la télétype provoque le démarrage du calcul de la loi de commande optimale ; une fois que cette loi est déterminée, les appels prioritaires du four se trouvent validés, et on exécute la procédure décrite en (IV-4).

- Schéma de câblage :

L'ensemble, four et calculateur hybride est câblé comme le montre le schéma suivant :

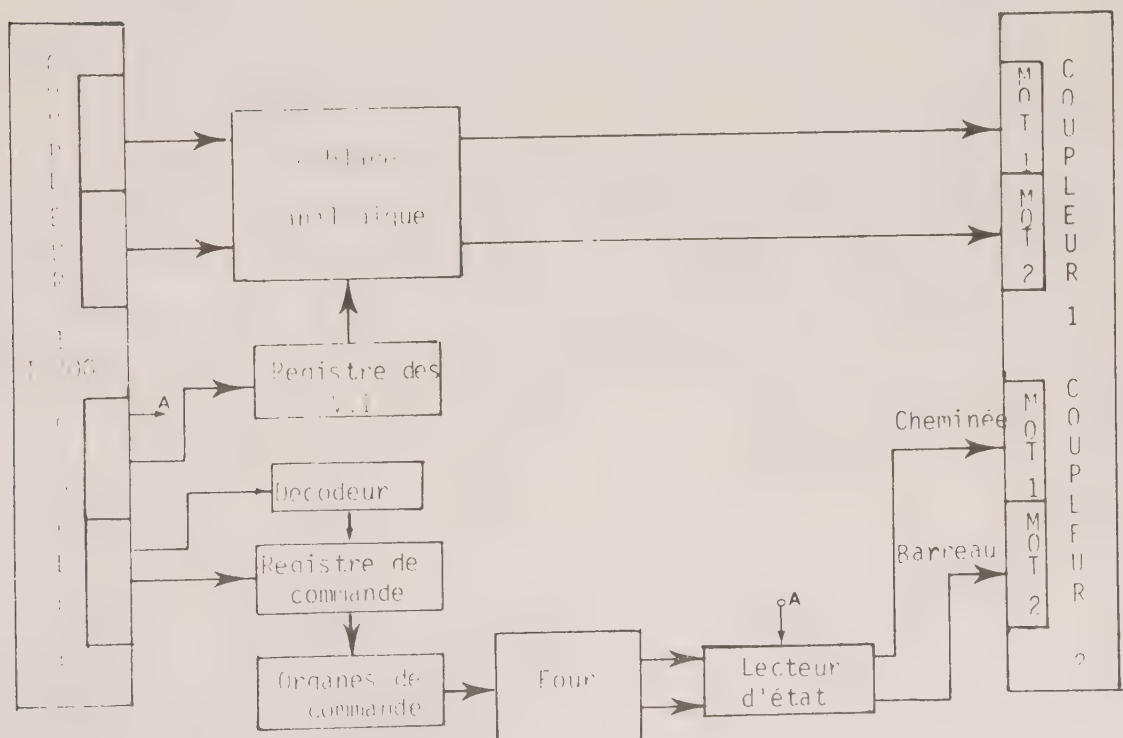


FIGURE (VI-4) : Schéma de câblage global

Remarque :

En cas de non convergence du calcul au bout de 10,24 sec. nous annulons la séquence de calcul et nous en commençons une autre en actualisant les valeurs initiales ; la loi de commande à appliquer au processus durant cette nouvelle séquence est la suite de celle que l'on appliquait durant la séquence précédente.

VI-3. Résultats et commentaires

Toutes les expériences ont été effectuées dans une salle avec une température ambiante variant entre 22°C et 24°C. La matrice R donnée en (VI.2.1) a été maintenue fixe ; les courbes que nous avons tracées reflètent l'évolution de température du barreau résultant de l'application d'une commande déduite de l'optimisation du critère (6-1) avec différents horizons en modifiant à chaque fois le poids α de l'écart de sortie.

La figure (VI-5) est relative à un horizon de 8 mn et un poids $\alpha = 20$.

La courbe (1) montre l'évolution de la température du barreau pour la tranche du bas ; la courbe (2) représente la commande appliquée à cette tranche. On remarque un écart important entre l'état réel et l'état désiré montant parfois jusqu'à +5°C ; bien que la commande devienne inférieure à u_{12d} elle n'est pas suffisamment faible pour faire décroître l'écart $z_{12} - z_d$. Afin de réduire cet écart nous augmentons la valeur de α (en diminuant T) et les résultats obtenus apparaissent sur la figure (VI-6), avec un horizon de 5,6 mn et $\alpha = 40$.

Les courbes (1) et (2) représentent respectivement l'évolution de la température du barreau pour la tranche du bas, et celle de la commande appliquée ; on observe que l'écart $z_{12} - z_{12d}$ persiste et varie cette fois entre 1°C et 3°C, cependant l'état, en général, s'approche de l'état désiré d'une manière sensiblement meilleure que dans l'expérience précédente, mais ceci reste insuffisant.

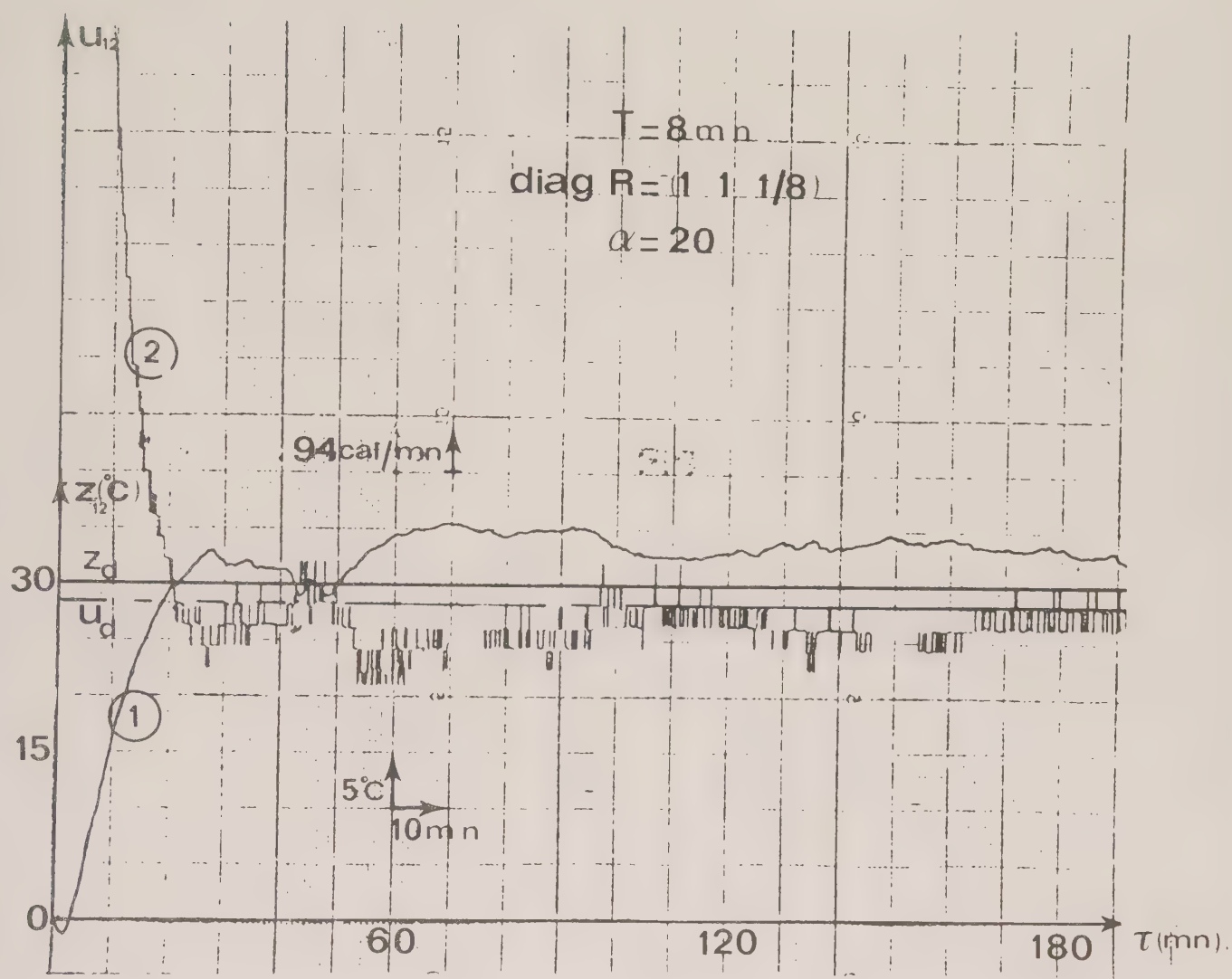


FIGURE (VI-5)

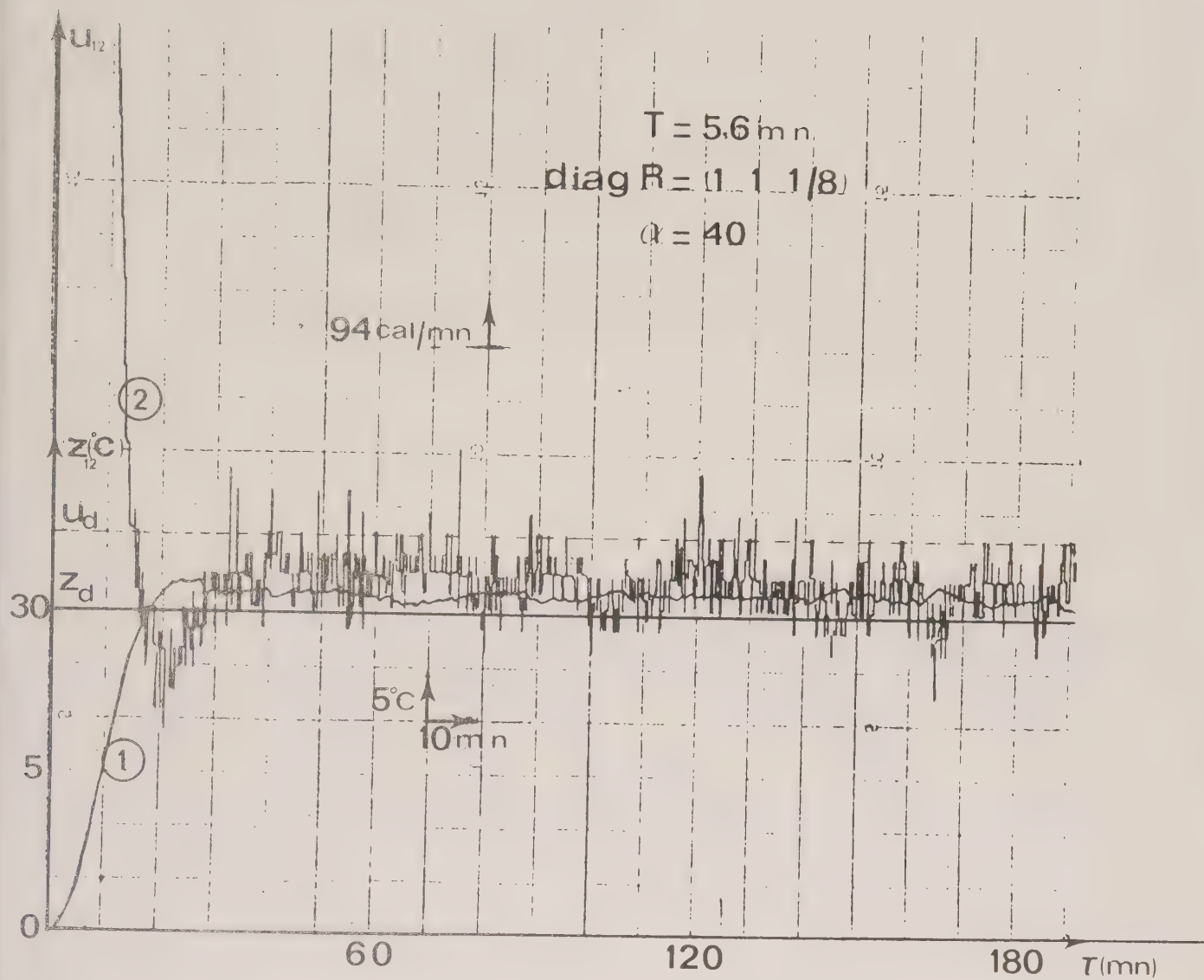


FIGURE (VI-6)

Pour un horizon de 3,6 mn et $\alpha = 100$ (figure VI-7) , les courbes (1) et (2) analogues aux précédentes montrent une meilleure régulation, quoique à certains moments (a), (b) et (c), z_{12} s'écarte de z_{12d} durant un temps relativement important (de l'ordre de 10 mn). Il ne faut pas oublier que l'influence de la commande sur le barreau se fait à travers la cheminée et que celle-ci a une "constante" de temps de l'ordre de 20 mn ; rappelons de plus que le barreau est extrêmement sensible aux variations de la température extérieure car, comme nous avons pu le constater, une variation de la température ambiante de 1°C conduit à une variation moyenne de température sur le barreau de l'ordre 12°C .

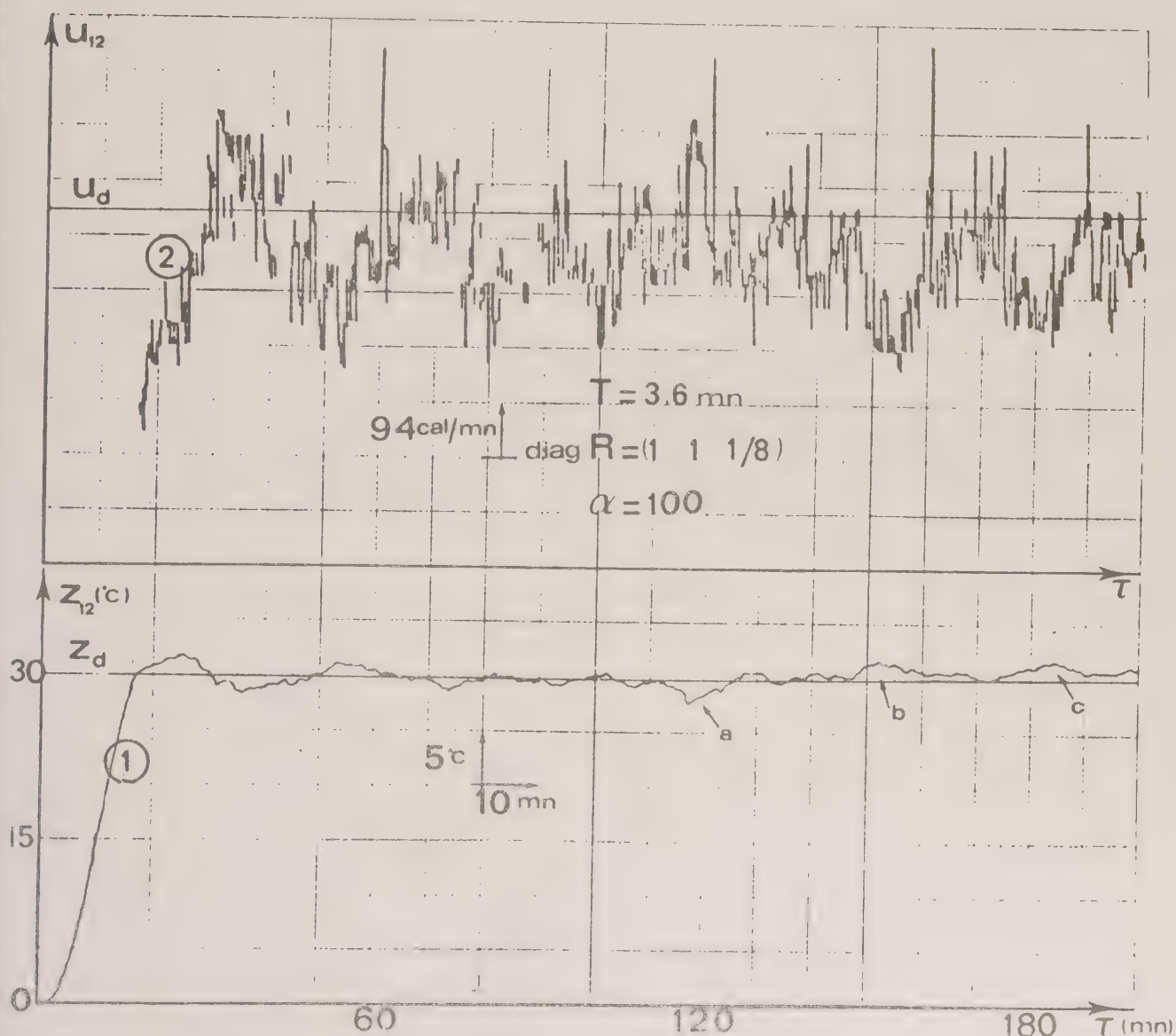
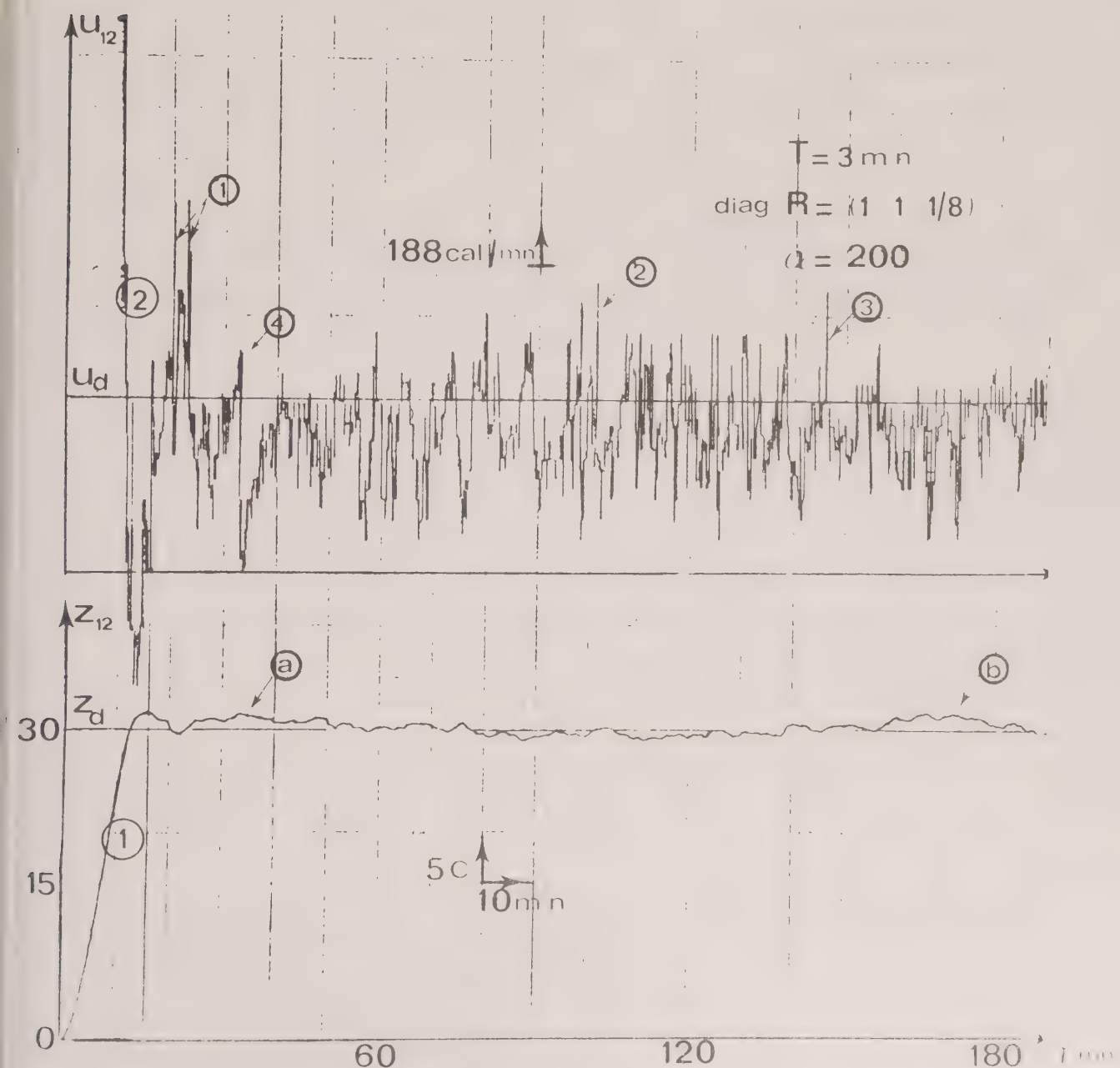


FIGURE (VI-7)

Lors de l'essai représenté à la figure (VI-8) nous avons encore doublé le poids de la précision ($\alpha = 200$) sans pourtant diminuer trop l'horizon ($T = 3$ mn) l'évolution de l'état semble mieux suivre la consigne ; on remarque cependant que le premier dépassement provoque une commande inférieure à celle qui serait nécessaire pour maintenir cette tranche à son point de fonctionnement u ; on note de plus que l'état s'écarte de l'état désiré plus tard en (a) et (b) sans pourtant provoquer la même réaction de la part de la commande. Il faudrait peut être interpréter ceci dans le cadre de la commande globale, car un tel écart au niveau de cette tranche n'est pas ressenti de la même manière au niveau des autres tranches.



Notons sur l'ensemble de ces courbes, la décroissance du temps de réponse en fonction du poids de la précision, ce qui est tout à fait prévisible.

Remarque

Sur la figure précédente par exemple on observe que certaines valeurs de la commande semblent être en discontinuité avec les valeurs précédentes et suivantes telles que (1), (2) et (3). Ceci est dû, soit à des fausses lectures d'état initial, la correction se faisant généralement au cours de la lecture suivante, soit encore lorsque l'algorithme de calcul de la loi de commande ne converge pas pour différentes raisons (perturbation de calcul par exemple) c'est le cas du point (4).

Pour un même horizon et un α identique nous avons tracé les évolutions d'état des tranches 11 et 12, figure (VI-9), puis celles des tranches 10 et 12 figure (VI-10) ; sur ces deux figures les résultats de la figure (VI-8) se confirment.

Il serait intéressant de montrer l'influence d'une forte perturbation affectant une tranche, sur les deux autres ; sur la figure (VI-11) où les courbes (1) et (2) correspondent à la suite des mêmes courbes que celles de la figure (VI-10), nous avons réalisé une perturbation de l'état du barreau de la tranche du bas en mettant à zéro au niveau du calculateur analogique, l'état initial relatif à cette tranche jusqu'au moment où l'état du barreau de cette tranche atteint 60°C environ. On remarque que la sortie relative à la 10ème tranche n'a été perturbée que de quelques degrés (entre 3°C et 4°C) ; par contre la sortie de la 11ème tranche (que nous n'avons pas pu tracer) avait subi une augmentation de l'ordre de 12°C, la commande fournie à cette tranche étant quasiment nulle.

On reconnaît ici une situation où les régulations classiques associées à chaque tranche pourraient avoir des conflits conduisant éventuellement à l'instabilité.

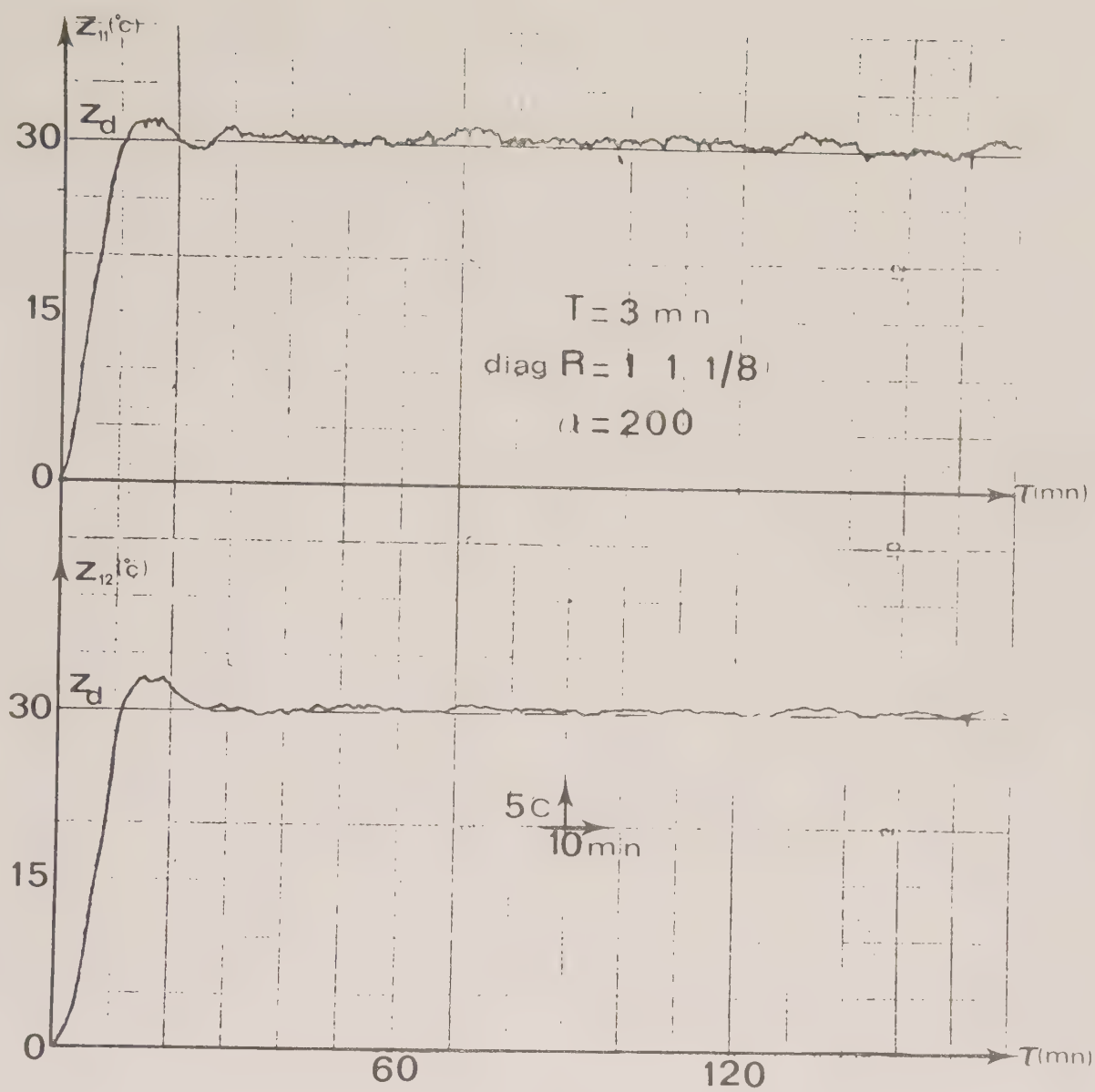


FIGURE (VI-9)

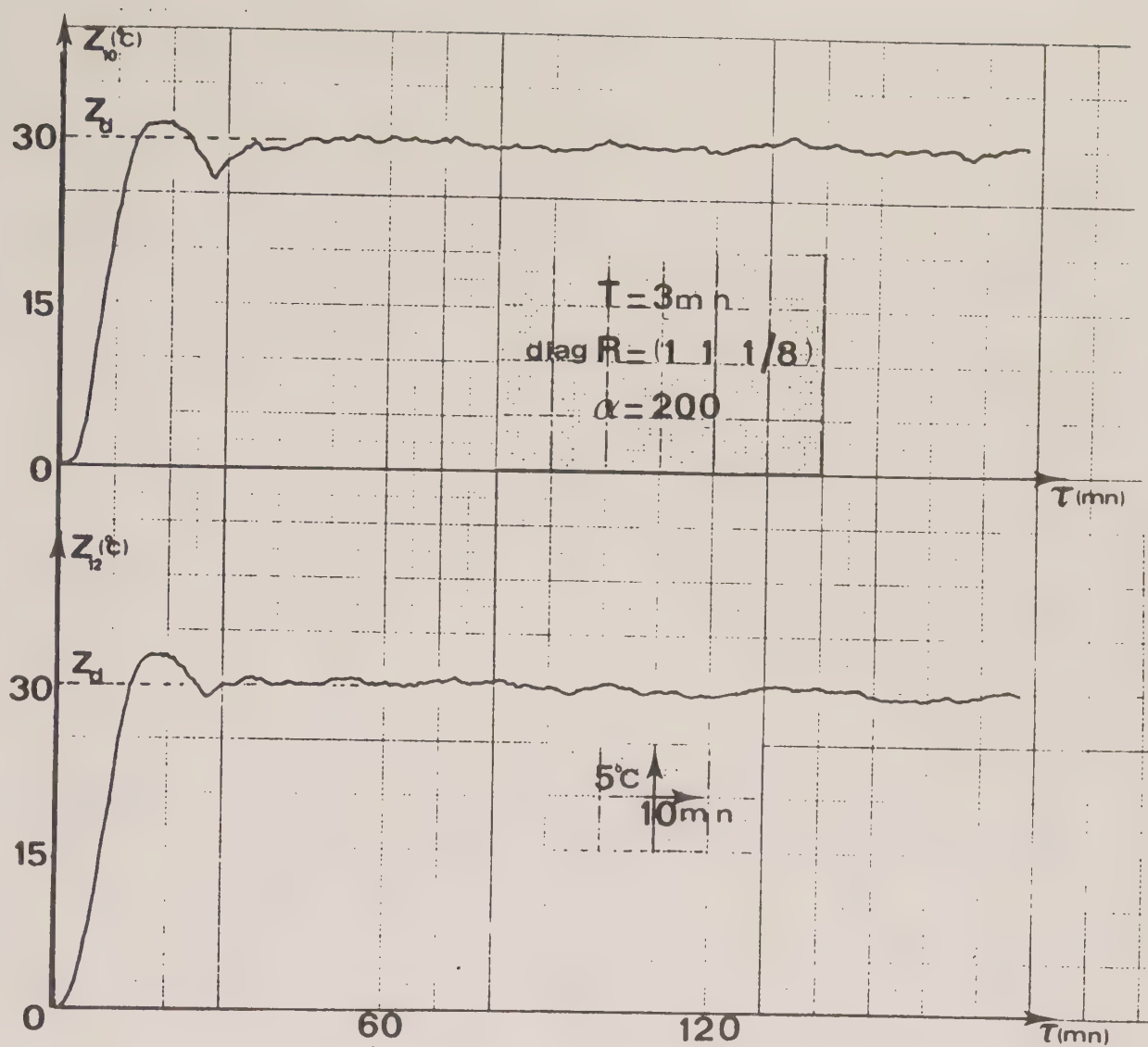


FIGURE (VI-10)

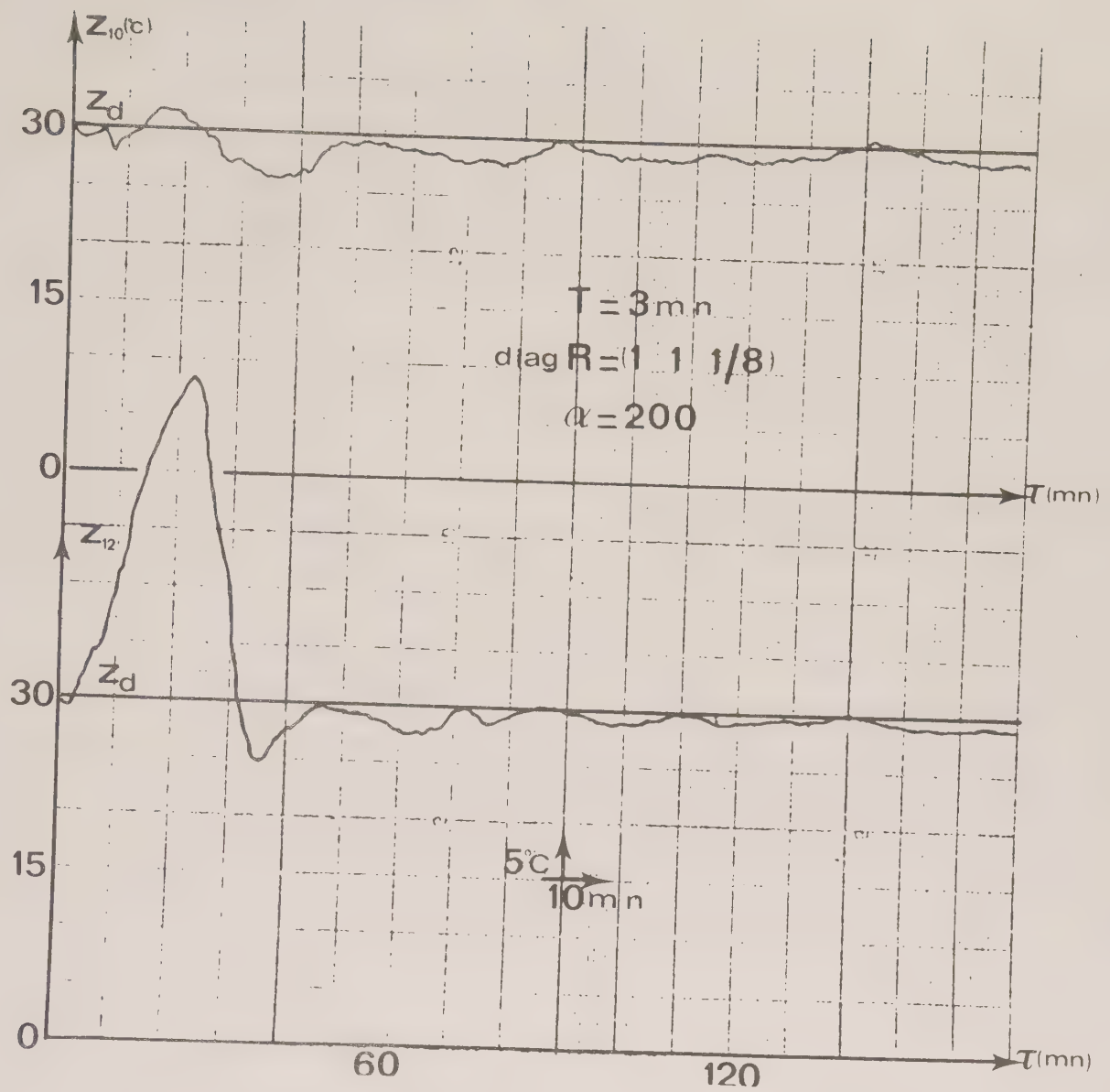


FIGURE (VI-11)

VI-4 - Conclusion

Ces expériences auraient pu être effectuées pour d'autres valeurs de α et T ; nous nous sommes arrêtés là car, pour $\alpha > 200$ certaines cases mémoires réservées aux coefficients utilisés dans le calcul se trouvaient saturées, du fait que lors de la rédaction du programme de calcul nous ne pensions pas aller jusqu'à des valeurs aussi élevées de α .

Nos objectifs essentiels étaient les suivants :

- 1 - Montrer la faisabilité de la commande en boucle fermée par intermittence, chose qui a été rendue possible grâce à la rapidité du calculateur hybride.
- 2 - Démontrer que ce mode de commande permet aussi de répondre à des exigences de régulation même dans le cas de systèmes multivariables fortement perturbés (perturbations extérieures et modèle grossier). Les résultats expérimentaux obtenus prouvent clairement "l'atteignabilité" de ces objectifs.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au problème de la commande de systèmes multivariables en boucle fermée par intermittence, mode de commande applicable a priori à tout système linéaire ou non, avec ou sans contraintes.

Nous nous sommes efforcés de mettre en évidence certains aspects de la commande en boucle fermée par intermittence, tels que la stabilité et la caractérisation de l'évolution de systèmes linéaires stationnaires multivariables soumis à une telle commande minimisant un critère quadratique.

Nous retenons de cette étude le fait que sous certaines hypothèses (H_0), la conduite en boucle fermée par intermittence, relative à un critère d'optimalité J et à un horizon fini T , est équivalente à une conduite par rapport à un critère J' à horizon infini pour lequel la pondération de l'écart de sortie est "inférieure" à celle figurant dans J . Nous faisons alors apparaître ce que l'on pourrait appeler le "problème inverse", à savoir : pour un horizon T , trouver la matrice de pondération Q de l'écart de sortie, de sorte que l'évolution engendrée par l'application (en boucle fermée par intermittence) de la commande minimisant J_T, Q , soit équivalente à celle obtenue par la minimisation du critère J_∞, Q_∞ , avec Q_∞ donnée. Les performances peuvent alors être évaluées (temps de réponse et précision) dans la mesure où l'on peut prédéterminer un critère J_∞ caractérisant une évolution spécifiée [25] , [26] .

Nous avons appliqué ce mode de commande à un processus thermique multivariables dont nous avons pu apprécier les possibilités de régulation, du point de vue de la précision et du temps de réponse, en dépit d'un caractère approché du modèle du processus, et de la sensibilité de la sortie vis-à-vis des perturbations extérieures.

Lors de ces expériences nous avons pu constater que le choix d'un horizon relativement petit nous autorise à prendre une pondération de l'écart de sortie importante, permettant d'obtenir une meilleure régulation sans compromettre la convergence des algorithmes du calcul. A ce stade on peut s'interroger sur la possibilité d'obtenir un compromis "optimal" entre T et Q dans le cas général (ne détruisant pas la convergence).

La réalisation de cette méthodologie de commande a pu être faite grâce à un calculateur hybride rapide, réalisé au L.A.B., permettant de fermer la boucle à une fréquence suffisamment élevée.

Dans l'avenir d'autres expériences devront être effectuées sur l'ensemble du processus, de manière à illustrer l'intérêt de la méthode pour la conduite de grands systèmes, ou de systèmes interconnectés.

Il est cependant probable que la transposition de cette technique au domaine industriel nécessitera soit l'industrialisation d'un matériel analogique approprié, soit la réalisation de systèmes microinformatiques à processeur multiples permettant d'atteindre des performances équivalentes avec une fiabilité élevée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ATHANS, P.L. FALB
Optimal control
Mc Graw-Hill Book Company

- [2] I. GUMOWSKI, C. MIRA
L'optimisation, la théorie et ses problèmes
Dunod

- [3] L. ROITENBERG
Théorie de contrôle automatique
Mir

- [4] A. FELDBAUM
Principe théorique des systèmes asservis optimaux
Mir

- [5] J.L. LIONS
*Contrôle optimale des systèmes gouvernés par des équations
aux dérivées partielles*
Dunod

- [6] R.E. KALMAN
Contributions to the theory of optimal control
Bul. Soc. Math. Mexicano, Vol.5, pp.102-119, 1960

- [7] K. OGATA
State space analysis of control système
Prentice Hall, 1967

- [8] R. BUCY, PP. JOSEPH
Filtering for stochastic processes with applications to guidance
Interscience Publishers - New York, 1968
- [9] B. LANG
Calcul hybride décentralisé de la commande optimale d'un processus dynamique continu
Thèse de Docteur-ingénieur - Besançon 1977
- [10] S. BARNETT and STOREY
Matrix methods
Thomas Nelson and Son (1970)
- [11] D.L. KLEINMAN and M. ATHANS
The design of suboptimal linear time-varying systems
IEEE - Vol. AC-13, n° 2, April 1968
- [12] A. BARREAU, Y. THOMAS
Commande optimale a horizon fuyant
Revue R.A.I.R.O. n° Avril 1974, J-1, p.126 à 140
- [13] J.P. YVON
Etude de la méthode de boucle ouverte adaptée pour le contrôle de systèmes distribués
IRIA - Laboria
78 - Rocquencourt (France), p.427 à 441
- [14] M. AMOUROUX, J.P. BAVARY, A. EL JAI and GUYON
Hybrid simulation of adaptive open loop control for parabolic systems
Mathematics and computers in simulation XX (1978) 250-258
- [15] LAMBERTO CESARI
Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations
Springer-Verlag Merlin Heidelberg - New York 1971, p.66-67

- [16] LABORATOIRE D'AUTOMATIQUE DE L'ENSCMB - LABORATOIRE DE CALCUL - FACULTE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE BESANCON
Algorithmes de relaxation-décentralisation en contrôle optimale
Rapport ATP - Mai 75
- [17] LABORATOIRE D'AUTOMATIQUE DE L'ENSM - LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE -
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE BESANCON
*Mise au point d'un système hybride de commande optimale
décentralisée*
Rapport ATP - Mai 1978
- [18] J.C. MIELLOU
C.R.A.S. (275), série A, p.1107, 1972
- [19] P. COMTE
Algorithmes de relaxation-décentralisation
Thèse de 3° Cycle n° 261, Besançon 1976
- [20] M.N. ELTARAZI
*Algorithmes de relaxation asynchrone - Décentralisation et
coordination pour résoudre un grand système d'équations diffé-
rentielles non linéaire*
Rapport de recherche - Novembre 1978
- [21] L. RAFFORT
*Simulation de systèmes continus complexes par des méthodes de
décomposition et de coordination par relaxation asynchrone*
Rapport de recherche - Mars 1980
- [22] A.W. EL AWTANI
*Réalisation, identification et commande d'un processus technique
à entrées et sorties multiples*
Thèse de 3° Cycle - n° 299, Besançon 1978
- [23] J.L. DIEN
*Contribution à l'optimisation de la conduite en ligne d'une
unité de fabrication de dichlorhydrine*
Thèse de Docteur-Ingénieur - Besançon - Juin 1978

- [24] X. GOMBERT
Commande optimale hiérarchisée d'un processus dynamique non linéaire
Thèse de Docteur-Ingénieur - Besançon - Juin 1978
- [25] D.G. SCHULTZ et J.L. MELSA
State functions and linear control systems
Mc Graw Hill, Series in Electronic Sytems, 1967, p.302-312
- [26] J.P. GAUTHIER, N. NOUGARET, SAINT-VAL
Commande optimale avec erreur statique spécifiée
R.A.I.R.O. Automatique (Vo.10, n° 11, Novembre 1976, p.23 à 40)
- [27] B. LANG, N.E. CHEICKH OBEID
Commande hiérarchisée à deux niveaux de processus de production continue
Annales Scientifiques de l'Université de Besançon - Physique, 3° Série, fasc. 25, 1977
- [28] B. LANG, A.W. AWTANI, P. SPITERI, N.E. CHEICKH OBEID
Decentralized calculions in optimal control of large THERMIC PROCESS : METHODES AND RESULTS
2ème Symposium I.F.A.C, Toulouse, 24-26 Juin 1980
- [29] F. LHOTE, B. LANG, J.L. DIEN, X. GOMBERT, J.L. PFENNIG
Conduite optimale d'un procédé non linéaire complexe
Compte-rendu de fin d'étude d'une recherche financée par la Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique L.A.B. - Avril 1980

